TOPOLOGISCHE UNTERSUCHUNGEN ÜBER ZERLEGUNG IN EBENE UND SPHAERISCHE POLYGONE.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

VEREINIGTEN FRIEDRICHS-UNIVERSITÄT

HALLE-WITTENBERG

VORGELEGT VON

PAUL MAHLO

AUS COSWIG I. ANH.

HALLE a. S.

HOFBUCHDRUCKEREI VON C. A. KAEMMERER & CO.

1908.

Referent: Professor Dr. **A. Gutzmer.**

Meiner Mutter

und

dem Andenken meines Vaters.

§ 1. Einleitung.

Die vorliegenden Untersuchungen sind auf Anregung von Herrn Prof. Dr. F. Bernstein in der Absicht begonnen worden, möglichst eine systematische Übersicht über sämtliche Zerlegungsbeweise des Pythagoräischen Lehrsatzes zu geben. Die Zerlegungsbeweise stützen sich auf den Nachweis der Kongruenz ebener Polygone. Die hierüber angestellten Untersuchungen sind in Teil I enthalten. Doch gelang es nur, einen Teil des gestellten Problems zu erledigen. Dies veranlasste, zu einfacheren Problemen in der Topologie der ebenen Polygone überzugehen. So beschäftigt sich Teil II mit dem Aufbau konvexer Polygone aus konvexen Polygonen. Ausserdem wurde noch ein weiteres Gebiet erforscht. Es wurde aus einer Abhandlung von Duncan M. Y. Sommerville die Anregung zur Aufsuchung der Gesamtheit gewisser halbregulärer Zerlegungen der Kugelfläche empfangen, die in Teil III in Angriff genommen wurde.

An Litteratur, welche sich mit ähnlichen, wie den im folgenden behandelten, Fragen beschäftigt, sei folgendes angeführt. Über Beweise des Pythagoräischen Lehrsatzes sind im Bericht von Prof. Dr. Max Simon: Über die Entwickelung der Elementargeometrie im 19. Jahrhundert, Ergzgs.-Bd. I der Jahresber. d. D. Math.-Ver. S. 109 die Litteraturangaben zu finden. Mit axiomatischen Untersuchungen über Zerlegungsbeweise des Pythagoräischen Lehrsatzes beschäftigt sich die kürzlich erschienene Dissertation (Halle a. S. 1908)

von Herrn Brandes. Ferner vergleiche man zu Teil I § 7 die Abhandlung von Herrn M. Dehn: Über Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke, Math. Ann. Bd. 57. In Teil II ist, soweit mir bekannt, eine bisher noch nicht behandelte Fragestellung untersucht worden. Zu Teil III sei verwiesen auf Duncan M. Y. Sommerville: Semiregular networks of the plane in the absolute geometry, Trans. of the Roy. Soc. of Edinb. v. XLI p. III pag. 725—48. Verwandtschaft hiermit zeigen die Ermittelungen halbregulärer Polyeder durch Herrn E. Hess u. a.

Wir geben nun einen kurzen Überblick über Methode, Gang und Resultate in den drei Teilen.

In § 2 sind nach einer Erklärung der verwendeten Begriffe die bisher bekannten Zerlegungsbeweise beschrieben. Hieran schliesst sich im folgenden § die Ableitung einer Schar von Beweisen aus ihnen, die auf jeden vorgelegten Beweis angewendet werden kann. Der Hoppesche sowie viele andere mit ihm zusammenhängende Beweise werden mit einer Einteilung der Ebene in zwei durch ihre Seitenlänge unterschiedene Arten von Quadraten in Beziehung gebracht; mittels einfacher Konstruktionen wird aus derselben Zerlegung der Ebene der Epsteinsche Beweis erhalten. Der ausserdem mitgeteilte gänzlich neue Trapezbeweis erlaubt eine Verallgemeinerung des 3. Beweises, welcher von A. Göpel herrührt. Im § 4 verlassen wir diese mit speziellen Fragen operierenden Untersuchungen, indem wir eine systematische Einteilung aller Zerlegungsbeweise angeben, um darauf die Zerlegungsbeweise eines Teilgebietes zu ermitteln. Eine weitgehende Abstraktion vom Begriffe des einfachen Polygones, das wir dann Polygon von bestimmtem Gerüst nennen, ermöglicht uns die Klassifizierung. Nach allgemeiner analytischer Formulierung des Problems, Zerlegungsbeweise mit Polygonen vorgegebenen Gerüsts zu finden, behandeln wir die Aufgabe, die für Zerlegungsbeweise geeigneten Polygone gleichen Gerüsts zu finden, welche ein, zwei, drei oder unter gewisser Beschränkung vier

verschiedene Winkel enthalten. Unter den gemachten Voraussetzungen ergeben sich bei drei und vier Winkeln gewisse Polygone, welche Zerlegungsbeweise liefern können. Mit der Frage ihrer Existenz beschäftigt sich schliesslich § 7. Zerlegungsbeweise aus Vierecken mit zwei Rechten sind bekannt; solche aus rechtwinkligen Dreiecken und Fünfecken mit zwei Rechten werden als unmöglich erwiesen; über Beweise aus Fünfecken mit drei Rechten und aus gewissen Vielecken grösserer Seitenzahl mit vier Rechten steht die Entscheidung noch aus. Verallgemeinert man eine Fragestellung von Herrn M. Dehn (s. pag. 6), so wird ihr Problem durch unsere Untersuchung über das rechtwinklige Dreieck in einem Spezialfalle entschieden.

Der Teil II unserer Untersuchungen beschäftigt sich mit dem Aufbau konvexer Polygone aus konvexen Polygonen und fragt insbesondere, wieviel Polygone von derselben Seitenzahl l ein m-Eck aufbauen können. Dabei soll das letztere Polygon nur einfach überdeckt werden. Nach einigen allgemeinen Überlegungen in § 8 wird im folgenden § der Aufbau aus Drei-, Vier- und Fünfecken untersucht. Nur das Drei-, Vier- und Fünfeck lassen sich in komplizierterer Weise aus Fünfecken aufbauen, und die Minimalzahl der Fünfecke wird in § 10 abgeleitet; doch ist hierbei noch eine Voraussetzung gemacht, von der wir uns bisher nicht befreien konnten. Hier wie im folgenden benutzen wir den neuen Begriff eines „Ringes“ von Polygonen sowie gewisse Anlagerungsmöglichkeiten von Polygonen an Polygone. Für den Aufbau von Polygonen aus konvexen Polygonen von sechs und mehr Seiten besteht nun ein interessanter Satz über die Anlagerungsmöglichkeiten bei Verwendung unserer Ringsysteme, den wir in § 11 ableiten. Ein einfach zusammenhängendes, in konvexe l-Ecke ($l \geq 6$) zerlegtes Gebiet der einfach überdeckten Ebene enthält bei einem System von Ringen um ein l-Eck in keinem Ringe Inseln oder Halbinseln. Qualitativ erhalten wir damit Aufschluss über den Aufbau eines einfach zusammenhängenden Gebietes aus

konvexen Vielecken von sechs und mehr Seiten. Wegen der Kompliziertheit müssen wir aber darauf verzichten, unser oben gestelltes Problem in aller Allgemeinheit für den Fall $l \geqq 6$ zu lösen.

Im Teil III schicken wir die Behandlung eines Problemes voraus, welches in der nachfolgenden Untersuchung implizite gelöst wird. Wir ermitteln nämlich die sämtlichen regulären einfachen Polygone der Kugel, die sich in Polygone gleicher Seitenlänge zerlegen lassen. Darauf lassen wir in den §§ 13—16 die Hauptuntersuchung folgen. Wir suchen die Gesamtheit gewisser halbregulärer Zerlegungen der Kugelfläche. Die Elemente der Zerlegung sind reguläre Polygone; bei ihnen müssen zwei verschiedene Seitenlängen auftreten. Als reguläre Polygone werden neben den Drei-, Vier-, Fünf- . . . Ecken noch das Kugelzweieck von der Seitenlänge $R\pi$ sowie die Halbkugel oder das Nulleck mit der Seitenlänge $2R\pi$ aufgefasst, wo R den Kugelradius bedeutet. Die Vollständigkeit der Untersuchung wird durch Einteilung mittels Dichotomieen sichergestellt, deren wesentlichste Glieder in je einem § behandelt werden. So teilen wir ein: A, eine Halbkugel bleibt unzerlegt; B, Zerlegungen ohne Nullecke. Im letzteren Fall sind wieder zwei Möglichkeiten vorhanden, nämlich Zerlegungen 1. mit, 2. ohne Zweiecke. Nach einem neuen Gesichtspunkt wird schliesslich der Fall B 1. noch weiter eingeteilt. Bei der Ausführung geht die Einteilung natürlich noch weiter. Die gefundenen Zerlegungen werden in mit den römischen Ziffern I, II, . . . bezeichneten Klassen untergebracht, deren jede aber im allgemeinen noch Unterklassen, mit arabischen Ziffern unterschieden, besitzt; jede Unterklasse enthält höchstens in unwesentlichen Merkmalen sich unterscheidende Zerlegungen. Häufig umschliesst eine Unterklasse Scharen von unendlich vielen Zerlegungen mit einem oder mehreren stetig veränderlichen Parametern.

I. Zerlegungsbeweise des Pythagoräischen Lehrsatzes.

§ 2. Die bekannten Zerlegungsbeweise.

Unter Polygonen sind in allen folgenden Untersuchungen einfache Polygone in einer einfach überdeckten Ebene zu verstehen (D. Hilbert: Grundlagen der Geometrie). Ein Streckenzug, dessen Endpunkte auf dem Umfange und dessen übrige Punkte im Innern eines Polygons liegen, „zerlegt" das Polygon in zwei Polygone; diese beiden Polygone „bauen" das ursprüngliche Polygon auf. Wiederholte Anwendung der Operation des Zerlegens auf beim Zerlegen bereits entstandene Polygone liefert die Zerlegung eines Polygons in beliebig viele Polygone; aus mehreren Polygonen, welche höchstens Punkte der Begrenzung gemein haben, lässt sich gelegentlich durch Entfernung von Strecken gemeinsamer Begrenzung ein Polygon aufbauen.

Es mögen nun drei Quadrate A, B, C mit den beiden Katheten a und b bez. der Hypotenuse c eines rechtwinkligen Dreiecks als Seiten in mehrere Polygone zerlegt sein. Entspricht jedem Polygon in C ein Polygon in A oder B, das ihm kongruent ist, sowie diesem Polygon dasselbe Polygon in C, und enthalten A und B keine weiteren Polygone, so liefern die Zerlegungen von A, B und C einen Zerlegungsbeweis des Pythagoräischen Lehrsatzes. Denn es sind ja die Flächeninhalte der entsprechenden kongruenten Polygone gleich. Folglich ist auch die Summe der Flächeninhalte der Polygone in C gleich der Summe der Flächeninhalte der ihnen entsprechenden Polygone. Dies ist aber

die Gesamtheit der Polygone in A und B, und hieraus folgt der Pythagoräische Lehrsatz. Ein so erbrachter Zerlegungsbeweis liefert einen Beweis auf Grund der Kongruenz von Polygonen oder weist nach Hilbert Zerlegungsgleichheit von Flächen nach.

Die Zerlegungsbeweise teilen wir in „isolierte“ und „stetige“ Beweise ein. Ein isolierter Beweis gilt nur für ein bestimmtes Kathetenverhältnis a : b. Ein stetiger Beweis gilt für alle Werte a : b, welche in einem bestimmten Zahlenintervalle liegen; an den Grenzen des Intervalls kann sich die Analysis situs des Beweises ändern, sodass diese Grenzen auszuschliessen sind. Ausserdem können isolierte wie stetige Beweise in endlicher oder unendlicher Menge zu einer Gruppe von Beweisen zusammengeschlossen werden.

Isolierte Beweise und Beweisgruppen lassen sich leicht angeben. Ein einfaches Beispiel für $a = b$ giebt die Zerlegung des Hypotenusenquadrates durch die beiden Diagonalen, die Verbindung gegenüberliegender Quadratecken, während die Kathetenquadrate je durch eine solche Diagonale zerlegt sind. Für Beweisgruppen von isolierten und stetigen Beweisen zugleich geben die Beweise 3) und 4) von Göpel[1]) ein Beispiel. Im übrigen beschäftigen wir uns nur mit der Auffindung stetiger Beweise.

Von bisher bekannten stetigen Beweisen unterscheiden wir wesentlich 4 Typen. Darunter sind die beiden letzten allerdings die Beweisgruppen von Göpel. Im Anschluss an Herrn Brandes klassifizieren wir in diesem § die Zerlegungsbeweise nach ihrer axiomatischen Einfachheit. Diese Einfachheit wird an der Anwendung der Dreieckskongruenzsätze zum Beweise der Kongruenz entsprechender Polygone gemessen. Ist p die kleinste Anzahl von Dreiecken, in die ein Polygon zerfällt, so müssen die Dreieckskongruenzsätze p-mal auf dieses Polygon angewendet werden.

---

1) A. Göpel: Über Teilung und Verwandlung einiger ebenen Figuren. Archiv für Math. u. Physik, Bd. 4, S. 237.

Bildet man nun $\Sigma p = E$, die Summe der p für alle Polygone des Hypotenusenquadrates, so wird E als Mass der axiomatischen Einfachheit eines Zerlegungsbeweises gelten. Wie nun Herr Brandes gezeigt hat, ist der Zerlegungsbeweis im Euklidkommentar des Annairizi (etwa 900 n. Chr. Geb.), welcher offenbar unabhängig von Herrn R. Hoppe[1]) wiedergefunden ist, mit $E = 7$ der einfachste Zerlegungsbeweis. Bei diesem in Fig. 1 dargestellten Beweise 1) sind die entsprechenden kongruenten Polygone wie auch in den folgenden durch gleiche Ziffern bezeichnet. Durch Vergleich der Analysis situs bezüglich der Länge der Strecken sowie der Grösse der Winkel findet man leicht die kongruenten Stücke heraus. Der Einfachheit halber führen wir spiegelbildliche Zerlegungsbeweise nicht besonders auf; ebenso berücksichtigen wir es nicht, wenn, wie beim vorliegenden Beweise, in einem Quadrate kongruente Polygonsysteme vertauscht werden können; es ist nämlich Polygon 4 = Pol. 1 + Pol. 5.

Die nächsthöhere Einfachheit weist der Beweis 2) von Herrn P. Epstein[2]) auf, Fig. 2. Beide Kathetenquadrate werden bei ihm auf dieselbe Weise in 4 Dreiecke zerlegt, die paarweise symmetrisch sind.

Schliesslich sind noch die beiden Beweise 3) und 4) (Fig. 3 und 4) von A. Göpel[3]) zu nennen, welche wesentlich übereinstimmende Charaktere haben. Beide sind nicht eigentlich stetige Beweise, sondern Beweisgruppen, in denen stetige Beweise durch ihre Grenzfälle, isolierte Beweise, getrennt werden. In beiden Beweisgruppen ist das Hypotenusenquadrat in zwei besonders zu behandelnde Rechtecke zerlegt, deren kürzere Seiten mit den Projektionen der Katheten im rechtwinkligen Dreieck auf die Hypotenuse übereinstimmen. Das kleinere Rechteck ist dem kleineren

---

1) R. Hoppe: Anschaulicher Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes. Archiv f. Math. u. Physik, Bd. 8, S. 450.

2) Paul Epstein: Ein Zerlegungsbeweis des pythagoräischen Lehrsatzes. Zeitschrift f. math. u. naturw. Unterr., Bd. 36.

3) a. a. O.

Kathetenquadrat zerlegungsgleich. Ist $a < b$, so enthält die Zerlegung von A $(n-1)$ Parallelogramme mit den Seiten $\frac{a^2}{b}$ und $\frac{a\,c}{b}$ und der Höhe $\frac{a^2}{c}$, wo n die grösste ganze Zahl aus $\frac{b-a}{a}$ bedeutet. Bei den Figuren 3 und 4 ist $n = 1$ gewählt worden. Die Zerlegung eines kleineren Kathetenquadrates nach 3) und 4) ist in den Figuren 5 und 6 noch für $n = 2$ durchgeführt. Die Zahl E ist für dasselbe $\frac{a}{b}$ bei Beweis 4) stets um 4 grösser als bei Beweis 3). Beim letzteren Beweise ist für $a = b$ die Zahl $E = 6$. In jedem andern Falle liefert ganzzahliges $\frac{b-a}{a} = n$ einen isolierten Beweis mit $E = 2n + 7$. Ist $\frac{b-a}{a}$ keine ganze Zahl und n die grösste darin enthaltene ganze Zahl, so wird $E = 2n + 10$.

Durch Kombination der beiden Rechteckzerlegungen in C von Beweis 3) und 4) lassen sich noch eine Reihe anderer Zerlegungsbeweise herleiten, worauf wir jedoch nicht eingehen.

§ 3. Ableitung neuer Beweise.

Wir machen es uns jetzt zur Aufgabe, aus den vorhandenen Beweisen neue Beweise abzuleiten. Dabei berücksichtigen wir aber den Gesichtspunkt, dass die Zahl E einer Zerlegung nicht grosse Werte annehmen soll. Dies erreicht man bei den folgenden Überlegungen. Es sei ein Zerlegungsbeweis vorgelegt, d. h. Zerlegungen der Quadrate A, B, C. Wir können C in 2 Rechtecke zerlegen durch eine Linie parallel zwei Quadratseiten. Schieben wir das eine Rechteck parallel über das andere hinweg, dass die beiden der Schnittlinie parallelen Quadratseiten schliesslich aufeinanderliegen, so ist wieder ein zu C kongruentes Quadrat

entstanden. Durch die eingeführte Linie können Polygone des Hypotenusenquadrates zerlegt sein. Zerlegen wir die ihnen in A und B entsprechenden Polygone entsprechend, so entsteht wieder ein Zerlegungsbeweis. Lässt man die Teilungslinie gleichzeitig mit der Veränderung von $\frac{a}{b}$ stetig wandern, so entsteht ein stetiger Zerlegungsbeweis. Hier können auch isolierte Beweise als Grenzfälle auftreten; dies findet z. B. statt, wenn E seinen Wert ändert, oder wenn die wandernde Linie eine Polygonseite nicht mehr schneidet, sondern im Endpunkt berührt, oder sie die Seite gar in sich aufnimmt u. s. w. In allen diesen Fällen tritt eine Änderung der Analysis situs der Zerlegung ein.

Ebenso wie beim Hypotenusenquadrat kann die Teilungslinie natürlich auch in einem Kathetenquadrat eingeführt werden. Auch können mehrere Teilungslinien parallel verschiedenen Quadratseiten verwendet werden. Auf die vielen denkbaren Möglichkeiten gehen wir jedoch nicht näher ein, sondern nehmen eine Anwendung auf den ersten und zweiten Beweis vor. Beim 1. Beweise denken wir uns C durch eine Teilungslinie in C_1 links und C_2 rechts zerlegt. Wir fügen ein Abbild von C_1 rechts an C_2 und ein Abbild von C_2 links von C_1 an, lassen aber C_1 und C_2 an den Stellen, die sie ursprünglich inne hatten. Fügen wir nun ein weiteres Abbild von C_2 rechts und ein Abbild von C_1 links von dem erhaltenen Rechteck an, so ist dies so gut, wie wenn wir rechts und links von C dessen Abbild angetragen hätten. Diese neue Operation wenden wir nun nach beiden Seiten beliebig oft an. Ferner führen wir dieselbe Operation in der Richtung senkrecht zum bisher erhaltenen Streifen von Quadraten an, sodass schliesslich an jeder Seite eines zerlegten Hypotenusenquadrates ein ebenso zerlegtes Quadrat angrenzt. Denkt man sich jetzt die Seiten der Hypotenusenquadrate entfernt, so hinterbleibt eine regelmässige Zerlegung der Ebene in Quadrate A und B. Wir nennen die

so zerlegte Ebene I, ferner eine in Hypotenusenquadrate allein zerlegte Ebene II (Fig. 7; die Quadrate von I sind ausgezogen, die von II punktiert). Die Ebenen I und II mögen nun noch wie bei der soeben abgeleiteten Zerlegung der Ebene in zerlegte Hypotenusenquadrate übereinanderliegen. Was wir früher durch Einführung der Teilungslinie erreichten, das können wir jetzt durch stetige Parallelverschiebung der Ebene II über I erreichen, während wir gleichzeitig $\frac{a}{b}$ stetig variieren. Hiervon machen wir nun eine wichtige Anwendung. Wir zeigen nämlich, dass der Epsteinsche Beweis in innigem Zusammenhange mit dem Anairizischen Beweise steht. Verschieben wir die Ebene II nämlich so, dass die Mitten der Seiten von Quadraten C mit Mittelpunkten von Quadraten A und B zusammenfallen; ersetzen wir ferner die Quadrate C durch die ihnen einbeschriebenen Quadrate D mit den Mittelpunkten der Quadrate A und B als Ecken; und ziehen wir schliesslich in den Quadraten A und B die Diagonalen oder Verbindungslinien gegenüberliegender Quadratecken: Dann sind die Quadrate D wie beim Epsteinschen Beweise die Hypotenusenquadrate zerlegt (Fig. 8; die Quadrate D sind punktiert gezeichnet). Eine gleichzeitig mit stetiger Veränderung von $\frac{a}{b}$ erfolgende Parallelverschiebung einer Ebene III, welche in die Quadrate D zerlegt ist, über I schneidet aus dieser Ebene ebenfalls Zerlegungen der Quadrate D für neue Zerlegungsbeweise aus, wenn noch in I die Diagonalen der Quadrate A und B eingezeichnet sind.

Zum Schluss dieses § wollen wir noch eine Gruppe von neuen Zerlegungsbeweisen mitteilen, welche wie die Beweise 3) und 4) das Archimedische Axiom erfordern. Das Hypotenusenquadrat sei so zerlegt, dass das Quadrat A unzerlegt in ihm enthalten ist und mit ihm eine Ecke gemein hat. Den Rest des Hypotenusenquadrates zerlegen wir durch seine Symmetrielinie in zwei symmetrische Paralleltrapeze E_1 und

E_2. Wir wollen symmetrische Figuren nicht als kongruent ansehen, wenn sie sich nicht durch Parallelverschiebung und Drehung in ihrer Ebene zur Deckung bringen lassen. Deshalb müssen wir in im folgenden neben den Polygonen A, B, C, E_1, E_2 noch ihnen völlig kongruente Polygone A′, B′, C′, E_1', E_2' heranziehen. Da E_1 und E_1' zu E_2 und E_2' symmetrisch sind und entsprechend behandelt werden sollen, operieren wir nur mit E_1 und E_1', deren Zerlegungsgleichheit mit B oder B′ wir jetzt nachweisen. Aus E_1 und E_1' bilden wir ein Parallelogramm F_1. Wir zerlegen die Ebene in Parallelstreifen gleicher Breite h, deren jeder später aus einer einzigen Reihe zu F_1 kongruenter Parallelogramme aufgebaut werden soll. Infolgedessen kann h drei verschiedene Werte annehmen, nämlich:

$$h_1 = c - a, \quad h_2 = \frac{1}{2}(c + a)\sqrt{2}, \quad h_3 = c + a.$$

Ausser im dritten Falle werden wir neue Zerlegungsbeweise auffinden. Die Parallelstreifen mögen nun die Geraden G_n und G_{n+1} als Begrenzung haben, wo n jede ganze Zahl sein kann. Auf G_0 wählen wir einen Punkt P und beschreiben um ihn mit dem Radius b einen Kreis. Dieser schneidet für $h = h_1$ und h_2 eine Reihe von Geraden G_n mit $n \neq 0$. Wir greifen eins der positiven n heraus und legen durch P sowie den Schnittpunkt P_n des Kreises mit G_n eine Gerade H. Diese schneide $G_{n \cdot m}$ in $P_{m, n}$, wo m eine beliebige ganze Zahl sei. Wir zerlegen nun die Ebene ferner in Parallelstreifen der Breite b parallel H; die Begrenzungen eines Parallelstreifens seien die Geraden H_l und H_{l+1}, H_0 stimme mit H überein. Diese Streifen sollen nun in Quadrate der Seitenlänge b zerlegt werden und zwar sollen Streifen, deren Werte l mod. n kongruent sind, stets auf dieselbe Weise zerlegt sein. Wird nämlich der eine Streifen auf den andern mit kongruentem l parallel in der Richtung der Linien G verschoben, so soll die Zerlegung beider sich decken. Verfährt man ebenso mit zwei Streifen, deren Werte l mod. n inkongruent sind, so sollen die Zerlegungen in Quadrate sich erst dann decken,

wenn der eine Streifen um ein ganzzahliges Vielfaches der Strecke $\frac{1}{n} P P_{1n}$ in der Richtung der Geraden H verschoben ist. Daraus ersieht man, dass die Wahl unseres Punktes $P_{1,n}$ uns zu n! verschiedenen Zerlegungen der Ebene führt. Bezeichnen wir den Schnitt von G_m mit H_1 durch $Q_{1,m}$, so erkennt man leicht, dass das Quadrat über $Q_{oo}\ Q_{no}$ dem Parallelogramm $Q_{oo}\ Q_{o1}\ Q_{n1}\ Q_{no}$ zerlegungsgleich ist. Dieses hat aber die Höhe zwischen G_o und G_1 mit F_1 gemeinsam und ferner denselben Flächeninhalt, also auch dieselbe Grundlinie gleich $Q_{oo}\ Q_{no}$. Durch Zerlegung in ein Viereck und ein Dreieck werden beide gleich zerlegt. Die Zahl der resultierenden Zerlegungsbeweise ist im allgemeinen kleiner als n!, weil in einer Reihe von Zerlegungen kongruente Parallelogramme in F_1 aneinandergrenzen. Als ein Fall der Zerlegung von F_1 kommt die zu Beweis 3) gehörige Zerlegung des zu A zerlegungsgleichen Rechtecks vor. Wir haben also zugleich eine weitere Verallgemeinerung von Beweis 3) gefunden. Unsere Fig. 9 gibt ein Beispiel der Zerlegung für den nur im Intervall $c \leqq 3a$ bestehenden Fall, in dem $h = h_2$ ist. Falls das Gleichheitszeichen ausgeschlossen ist, existieren für jedes $\frac{a}{b}$ zwei Zerlegungsbeweise, deren einen wir nur darstellen. Auf weitere Zerlegungsbeweise, die sich durch Anwendung oben gegebener Überlegungen aus dem „Trapezbeweise“ ableiten liessen, gehen wir der Kürze wegen nicht ein.

§ 4. Systematische Einteilung aller Zerlegungsbeweise auf Grund des Gerüstbegriffes.

Bisher ist es gelungen, einige Verallgemeinerungen der schon bekannten Zerlegungsbeweise anzugeben. Doch sind wir damit nicht im geringsten im Stande, die Gesamtheit der Beweise aufzufinden. Diesem Ziele kann man sich leichter nähern, wenn man die Gesamtheit der Beweise in Klassen einteilt, deren jede leichter in Bezug auf Vollständigkeit in

der Herleitung der Beweise zu prüfen ist. Im folgenden ist nun eine Klassifizierung verwendet, mit welcher wir nur bis zu gewissem Grade direkt die Frage nach der Existenz von Beweisen vorgelegter Art entscheiden können. Wir untersuchen dann die einfachsten Klassen auf die Existenz stetiger Beweise hin. Die Fälle, welche sich zunächst als möglich ergeben, liefern aber nicht direkt Zerlegungsbeweise, sondern sind noch mit andern Hilfsmitteln genauer zu untersuchen. Denn unsere Klassifizierung liefert wohl notwendige, aber nicht die hinreichenden Bedingungen. Gehen wir nunmehr auf die Klassifizierung näher ein.

Wir abstrahieren zunächst von allen Längenverhältnissen, welche bei einer Zerlegung speziell eines Quadrates auftreten. Dann bleiben in einfach geschlossenen Polygonen noch die Winkel übrig, von deren Reihenfolge auf dem Umfange wir ebenfalls absehen. Stimmen zwei Polygone dann überein, so nennen wir sie von „gleichem Gerüst“. Wir definieren:

„Zwei stetig veränderliche einfach geschlossene Polygone sind von gleichem Gerüst, wenn sie nur dieselben Winkel und jeden in gleicher Anzahl enthalten.“

Enthält also das erste Polygon verschiedene Winkel A_1, A_2, . . . A_n, so treten im zweiten Polygon von gleichem Gerüst dieselben und keine andern Winkel auf. Ferner ist der Winkel A_1 im ersten Polygon ebenso oft enthalten, wie im zweiten. In unmittelbarer Folgerung hieraus ist die Gesamtzahl der Winkel und auch die Anzahl der Seiten in beiden Polygonen dieselbe. Die Seitenlänge Null sowie der Winkel π sind ausgeschlossen.

Bei einer Zerlegung eines der Quadrate A, B, C werden wir nun die Anzahl der verschiedenen Gerüste von Polygonen bestimmen, welche auftreten. Diese Anzahl N ist im allgemeinen kleiner, höchstens gleich der Anzahl der aufbauenden Polygone. Wollen wir eine bestimmte Klasse von Zerlegungsbeweisen aufstellen, so können wir zunächst N fest geben. Ferner ist für jedes der N verschiedenen Gerüste

die Anzahl der verschiedenen Winkel festzustellen und wie oft jeder auftreten soll. Dabei ist nicht ausgeschlossen, dass in Polygonen verschiedenen Gerüstes derselbe Winkel vorhanden sein darf. Es dürfen z. B. Rechtecke neben Polygonen mit drei Rechten und anderen Winkeln in die Zerlegung eingehen.

Nunmehr können wir unser Problem, stetige Zerlegungsbeweise aufzufinden, auch analytisch formulieren. Zunächst haben wir die Bedingung, dass die verwendeten Anzahlen positive ganze Zahlen, im Minimum 0, sein müssen. Bei einem Polygon vom k-Gerüst soll der Winkel A_i $l_i^{(k)}$-mal auftreten, wobei:

1) $$l_i^{(k)} \geqq 0, \quad \sum_k l_i^{(k)} > 0, \quad \sum_i l_i^{(k)} > 2.$$

Denn nicht jedes Polygon, wohl aber wenigstens eins, muss den Winkel A_i enthalten; $\sum_i l_i^{(k)}$ hat als Seitenzahl eines Polygons mindestens den Wert 3. Die Winkel $A_i^{(k)}$ genügen gewissen Ungleichungen; bei einer konvexen Ecke liegt ihr Wert zwischen 0 und π, bei einer konkaven Ecke zwischen π und 2π. Der Wert π darf nie angenommen werden. Also folgt:

2) $$0 < A_i < 2\pi, \quad A_i \neq \pi.$$

Ferner haben wir die Relation für die Winkelsumme in jedem Polygon vom k-Gerüst, welche für ein n-Eck $(n-2)\pi$ beträgt. Dies gibt, wenn A_i der innere Winkel ist, die Relation:

3) $$\sum_i l_i^{(k)} \cdot A_i = (\sum_i l_i^{(k)} - 2) \cdot \pi.$$

Eine weitere Reihe von Beziehungen ergibt sich daraus, dass in der Zerlegung eines Quadrates einerseits die rechten Winkel, andererseits Winkel π und 2π durch Winkel A_i ausgefüllt werden müssen. Das erstere ist evident; dass die letzten beiden Fälle alle weiteren Möglichkeiten erschöpfen, erkennt man leicht. Denn bei einer Ecke eines aufbauenden Polygones kann ein Polygon vorhanden sein, für das dieser Punkt nicht Ecke ist; dann können aber

die Winkel A_i hier nur den Winkel π zusammensetzen. Ein solcher Punkt heisse „Randpunkt“ (Fig. 10, Punkte R). Wird dagegen an einer Ecke der Winkel 2π ausgefüllt, so heisse dieser Punkt „Innenpunkt“ (Fig. 10, Punkte J). Diese Bezeichnung ist auch in der zitierten Arbeit von Herrn Brandes benutzt worden. Welcher der drei Fälle nun vorliegen möge, stets wollen wir sagen, dass an einer Polygonecke der Winkel $\delta\pi$ auszufüllen sei. Hierfür kann nun jeder Winkel A_i bei Polygonen von k-Gerüst, die ihn enthalten, in Frage kommen. Es ist wesentlich, wie oft er bei einer bestimmten Ecke auftritt, etwa $\nu_{i,\delta}^{(k)}$-mal für Polygone vom k-Gerüst. Im allgemeinen wird jedoch derselbe Winkel $\delta\pi$ auf verschiedene Weisen mittels einiger der Winkel A_i aufgebaut werden. Wir numerieren diese verschiedenen Möglichkeiten, 1, 2, . . . g, . . . und werden $\nu_{i,\delta}^{(k)}$ durch das allgemeinere Zeichen $\nu_{i,g,\delta}^{(k)}$ ersetzen. Hier besteht wieder eine Positivitäts- und Ganzzahligkeitsbedingung:

$$4) \qquad \nu_{i,g,\delta}^{(k)} \geqq 0, \quad \sum_{i,k} \nu_{i,g,\delta}^{(k)} > 0.$$

Denn A_i muss nicht den Polygonen vom k-Gerüst, wohl aber überhaupt einem der Polygone angehören. Ferner haben wir mittels Darstellung eines Winkels $\delta\pi$ durch die ihn aufbauenden Winkel A_i:

$$5) \qquad \sum_{i,k} \nu_{i,g,\delta}^{(k)} \cdot A_i = \delta \cdot \pi.$$

Schliesslich machen wir noch von der Tatsache Gebrauch, dass zu jedem Polygon vom k-Gerüst der Winkel A_i genau $l_i^{(k)}$-mal auftreten muss. Sind also $C^{(k)}$ Polygone vom k-Gerüst vorhanden, so muss der Winkel A_i hier sicher $C^{(k)} \cdot l_i^{(k)}$-mal auftreten. Diese Zahl können wir noch anders darstellen. Der Winkel $\delta\pi$ sei auf verschiedene Weisen aufgebaut. Bei der g-Möglichkeit tritt A_i in Polygonen k-Gerüsts $\nu_{i,g,\delta}^{(k)}$-mal auf. Diese g-Möglichkeit sei bei der Zerlegung $c_{g,\delta}$-mal verwendet. Also ist der Winkel A_i hier $c_{g,\delta} \cdot \nu_{i,g,\delta}^{(k)}$-mal nötig. Die Anzahl, wie oft er überhaupt bei der Zerlegung auftritt, erhalten wir durch Summation nach g und δ. Dies gibt

die zweite Darstellung von $C^{(k)} \cdot l_i^{(k)}$. Wir finden durch Gleichsetzung für jeden Winkel bei jedem Gerüst eine Gleichung, deren Gesamtheit wir als „Anzahlrelationen“ bezeichnen wollen. Sie können in der Form geschrieben werden:

6) $$\sum_{g,\vartheta} c_{g,\vartheta} \cdot \nu_{i,g,\vartheta}^{(k)} = C_k \cdot l_i^{(k)}.$$

Da C_k eine Anzahl verwendeter Polygone angibt, $c_{g\vartheta}$ dagegen, wie oft $\delta\pi$ auf bestimmte Weise aufgebaut ist, so bestehen die Relationen:

7) $$C^{(k)} > 0, \quad c_{g,\vartheta} \geqq 0.$$

Da nun bei einem Quadrat der Winkel $\frac{\pi}{2}$ nur viermal auszufüllen ist, so können wir noch hinzufügen:

8) $$\Sigma\, c_{g,\frac{1}{2}} = 4.$$

In den Relationen 1) bis 8) sind die sämtlichen Eigenschaften niedergelegt, welche wir unseren Forschungen nach Zerlegungsbeweisen mit Polygonen von bestimmtem Gerüst zugrundelegen. Wie man erkennt, handelt es sich stets nur um Erfüllung notwendiger Winkelrelationen, die aber längst nicht hinreichend zu sein brauchen. Bei der Aufsuchung von Zerlegungsbeweisen müssen stets noch wenigstens die Längenverhältnisse berücksichtigt werden.

Für die folgende Untersuchung ist es zweckmässig, die Winkel A_i in anderer Form zu benützen. Da wir stetige Zerlegungsbeweise suchen, sind die Winkel A_i nicht sämtlich konstant. Sie müssen die linearen Relationen 2), 3) und 5) befriedigen, also können wir einige A_i oder lineare Funktionen von ihnen als unabhängige Parameter einführen, von denen alle A_i linear abhängen. Durch die Koëffizienten der Parameter müssen sich die Relationen erfüllen lassen. Wird A_i von den Parametern $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\varrho$ abhängig gedacht, so hat es eine Darstellung der Form:

$$A = \lambda\,\pi + \mu_1 \cdot \alpha_1 + \mu_2 \cdot \alpha_2 + \ldots + \mu_\varrho \cdot \alpha_\varrho.$$

Bei A sowie bei den konstanten Grössen λ und den μ ist der Index i hinzuzufügen. Die Zahl ϱ wird man im allgemeinen so gross wählen, dass die λ und μ nicht mehr stetig veränderlich sein können. Als Beispiel geben wir die Winkel des rechtwinkligen Dreiecks:

$$A_1 = \frac{\pi}{2},\ A_2 = \frac{\pi}{4} - \alpha,\ A_3 = \frac{\pi}{4} + \alpha.$$

oder: $$A_1 = \frac{\pi}{2},\ A_2 = \alpha,\qquad A_3 = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Ausser den bereits aufgestellten Relationen können den Koëffizienten der Parameter auch noch andere Bedingungen auferlegt werden; man erledigt dann nur die Untersuchung speziellerer Fälle.

§ 5. Die Polygone der Zerlegungsbeweise aus Polygonen gleichen Gerüsts mit drei verschiedenen Winkeln.

Die soeben dargelegten Ideen dienen zu einer systematischen Absuchung solcher Teilgebiete, deren Zerlegungsbeweise des Pythagoräischen Lehrsatzes man auffinden will. Wir beginnen nun die Erforschung eines derartigen Gebietes, indem wir die Bedingung stellen, dass nur Polygone von gleichem Gerüst verwendet werden sollen. Diesen recht allgemeinen Fall spezialisieren wir noch dahin, dass wir drei (ein und zwei Winkel führen zu keiner Möglichkeit, wie wir im folgenden noch zeigen) verschiedene Winkel zulassen, die l_1-, l_2-, l_3-mal in jedem Polygon vorhanden seien. Wir setzen die Relationen 1) bis 8) voraus, nur dass wir die Grösse $C^{(k)}$ in 6) ganz willkürlich lassen. Ausserdem verwenden wir die Darstellung der Winkel A_i mit dem Parameter α: $A_i = \lambda_i \pi + \mu_i \alpha$. Für die drei Grössen A_i besteht die eine Gleichung 3) stets, weshalb die A_i als lineare Funktionen von zwei Parametern gedacht werden können. Es wird sich aber zeigen, dass tatsächlich nur die Abhängigkeit von einem

Parameter zu Lösungen führt. Aber unsere Darstellung muss auch alle Lösungen aufzufinden gestatten, indem sich sonst die λ_i als lineare Funktionen eines Parameters t ergeben müssten:

$$\lambda_i = \lambda_{i1} + \lambda_{i2} \cdot t.$$

Setzen wir dies in A_i ein, so folgt:

$$A_i = (\lambda_{i1} + \lambda_{i2}\, t) \cdot \pi + \mu_i \cdot \alpha = \lambda_{i1}\, \pi + \mu_i \cdot \alpha + \lambda_{i2} \cdot t \cdot \pi$$
$$= \lambda_{i1}\, \pi + \mu_i \cdot \alpha + \mu'_i \cdot \alpha'.$$

μ'_i ist ein konstanter Proportionalitätsfaktor, etwa $= 1$, α' ein willkürlicher Parameter; aus dieser Darstellung erkennt man die Abhängigkeit von zwei Parametern, zu der wir also auch beim Ansatz mit α allein gelangen können.

Aus der Willkürlichkeit von α folgt nun, dass die Gleichungen 3) und 5) je in zwei Gleichungen für die λ und μ zerfallen. Bezeichnen wir nämlich die linken Seiten dieser Gleichungen als Funktionen von A_i mit $\varphi\,(A_i)$, die rechten Seiten mit ψ, so wird die Gleichung $\varphi\,(A_i) = \psi$ durch Einführung von α:

$$\varphi\,(\lambda_i \pi + \mu_i \alpha) = \varphi\,(\lambda_i \pi) + \alpha \cdot \varphi\,(\mu_i) = \psi.$$

Geben wir nun der willkürlichen Grösse α zwei verschiedene Werte α_1 und α_2 und subtrahieren die so entstehenden Gleichungen, so folgt:

$$(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \varphi\,(\mu_i) = 0.$$

Da $\alpha_1 - \alpha_2 \neq 0$ ist, folgt: $\varphi\,(\mu_i) = 0$.

Setzen wir dies in $\varphi\,(A_i) = \psi$ ein, so folgt ferner:

$$\varphi\,(\lambda_i \pi) = \psi.$$

Somit erhalten wir aus den Gleichungen 3) und 5):

3)
$$\begin{cases} l_1\, \lambda_1 + l_2\, \lambda_2 + l_3\, \lambda_3 = l_1 + l_2 + l_3 - 2 \\ l_1\, \mu_1 + l_2\, \mu_2 + l_3\, \mu_3 = 0 \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} \nu_1\, \lambda_1 + \nu_2\, \lambda_2 + \nu_3\, \lambda_3 = \delta \\ \nu_1\, \mu_2 + \nu_2\, \mu_2 + \nu_3\, \mu_3 = 0. \end{cases}$$

Hier sind die Grössen $\nu^{(k)}_{i,g,\delta}$ durch ν_i ersetzt, was die Bezeichnung vereinfacht und doch keine Verwirrung hervorrufen wird.

Wir wollen die Winkel A_i noch auf eine Normalform bringen. Da wenigstens einer unter ihnen nicht konstant ist, können wir diesen, etwa A_1, durch eine lineare Transformation zum Parameter α machen. Dieser nimmt dann nach 2) nur positive Werte an. Die Werte λ können aber teils positiv, teils negativ sein, λ_1 ist $= 0$. Wir wollen nun durch eine Transformation von α alle λ positiv, im Minimum zu 0 machen. Sei λ_2 negativ, dann ist sicher μ_2 nach Rel. 2) positiv. Wir führen A_2 als Parameter α' ein. Dann ist:

$$A_2 = \alpha' = \lambda_2 \pi + \mu_2 \alpha, \quad A_1 = \alpha = \frac{-\lambda_2 \pi + \alpha'}{\mu_2} = \lambda'_1 \pi + \mu'_1 \alpha$$

$$A_3 = \frac{\lambda_3 \mu_2 - \lambda_2 \mu_3}{\mu_2} \cdot \pi + \frac{\mu_3}{\mu_2} \cdot \alpha' = \lambda'_3 \pi + \mu'_3 \alpha'.$$

Alle λ' sollen $\geqq 0$ sein. Da $-\lambda_2 > 0$ und $\mu_2 > 0$, ist $\lambda'_1 > 0$. Damit aber auch $\lambda'_3 \geqq 0$ sei, ist nötig:

$$\lambda_3 \mu_2 - \lambda_2 \mu_3 \geqq 0.$$

Aus der Gleichung 3) für die λ folgt, dass λ_3 positiv ist. Sollte nun λ'_3 negativ sein, so müsste bei positivem $-\lambda_2$, μ_2 und λ_3 die Grösse μ_3 negativ sein; dann wäre aber bei positivem α' das transformierte A_3 negativ, was Rel. 2) widerspricht.

Als untere Grenze für den Wert λ_i erhalten wir so stets 0; die obere Grenze ist aber 2. Denn nach 4) sind die $\nu_i \geqq 0$ und für jeden Winkel A_i gibt es wenigstens ein $\nu_i \geqq 1$. In Rel. 5) für die λ können wir alle $\nu_k = 0$ und nur $\nu_i = 1$ setzen; ersetzen wir noch δ durch seinen grössten Wert, so folgt die Ungleichung:

$$\lambda_i \leqq 2.$$

Also ist 2 die obere Grenze für die Werte λ_i.

An dieser Stelle gelingt es uns leicht, den Fall von Polygonen gleichen Gerüsts mit nur einem oder zwei verschiedenen Winkeln zu erledigen. Der Fall eines Winkels ist auszuschliessen, da dieser konstant sein müsste. Bei zwei Winkeln machen wir den Ansatz:

$$A_1 = \alpha, \quad A_2 = \lambda \pi + \mu \alpha.$$

Aus den Gleichungen 3) und 5) erhalten wir die vier Relationen:

$$3)' \quad \begin{cases} l_2 \lambda = l_1 + l_2 - 2 \\ l_1 + l_2 \mu = 0 \end{cases} \qquad 5)' \quad \begin{cases} \nu_2 \mu = \delta \\ \nu_1 + \nu_2 \mu = \delta \end{cases}$$

ν_1 und ν_2 sind δ proportional und so stets $\neq 0$. Der Fall $\delta = \frac{1}{2}$ muss nach 8) eintreten, also ist $\lambda = \frac{1}{2k}$, k eine ganze Zahl; es folgt:

$$\frac{l_2}{2k} = l_1 + l_2 - 2; \; k = \frac{l_2}{2\,(l_1 + l_2 - 2)} \geqq 1$$

$$4 \geqq 2\,l_1 + l_2 \geqq 3.$$

Da l_2 gerade sein muss, bleibt nur $l_1 = 1$, $l_2 = 2$ übrig; es ergibt sich das rechtwinklige Dreieck; dieses gestattet keinen Aufbau des Winkels $\frac{\pi}{2}$ und aus dem Widerspruch gegen Rel. 8) folgt die Unmöglichkeit des Falles.

Jetzt kehren wir zum Fall von drei verschiedenen Winkeln zurück. Hier kann man versuchen, die beiden Gleichungen 5) nach den ν_i aufzulösen. Dabei treten drei Determinanten auf:

$$\Delta_1 = \lambda_2, \; \Delta_2 = \lambda_3, \; \Delta_3 = \lambda_2 \mu_3 - \lambda_3 \mu_3.$$

Wir müssen wissen, ob diese Δ_i auch 0 sein können. Δ_1 und Δ_2 können nicht gleichzeitig 0 sein, da sich dann die Gleichungen für die λ nicht erfüllen lassen. Also nehmen wir an, es dürfte nur $\Delta_1 = 0$ sein. Dann folgte nach 4), weil nach 8) notwendig auch für $\delta = \frac{1}{2}$ sein muss:

$$\nu_3 \lambda_3 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_3 \leqq \frac{1}{2}.$$

Ferner ist nach 3):

$$\frac{l_3}{2} \geqq l_3 \lambda_3 = l_1 + l_2 + l_3 - 2$$

$$4 \geqq 2\,l_1 + 2\,l_2 + l_3 \geqq 5.$$

Da die Anwendung von 1) zu einem Widerspruche geführt hat, ist dieser Fall unmöglich; also müssen λ_2 und $\lambda_3 \neq 0$ sein.

Aber auch A_3 muss $\neq 0$ sein. Sonst wäre A_3 ein Vielfaches von A_2 und wir könnten A_2 zum Parameter machen. Dann wäre der vorige Fall vorhanden, was zum gleichen Widerspruche führte.

Der Bedingung $A_3 \neq 0$ lässt sich genügen, indem wieder zwei Werte $\mu_i \neq 0$ sind. Wir benutzen dies als Einteilungsprinzip und behandeln getrennt die Fälle:

A) $\mu_2 = 0,\ \mu_3 \neq 0$
B) μ_2 und $\mu_3 \neq 0$.

A) Bei Fall A) suchen wir zunächst die Möglichkeiten, einen Winkel $\delta\pi$ aufzubauen. Hier ist entweder 1) A_2 allein, oder 2) A_1 und A_3 oder 3) A_1, A_2 und A_3 nötig. Wir setzen zunächst den nach 8) unumgänglichen Fall $\delta = \frac{1}{2}$ an. Dabei führt Fall 3) zu einem Widerspruch. Denn jeder Winkel träte wenigstens einmal bei $\frac{\pi}{2}$ auf, also wäre:

$$A_1 + A_2 + A_3 \leqq \frac{\pi}{2}$$

$$A_1 < \frac{\pi}{2},\ A_2 < \frac{\pi}{2},\ A_3 < \frac{\pi}{2}$$

Dann folgt aber nach der ursprünglichen Gleichung 3):

$$(l_1 + l_2 + l_3) \cdot \frac{\pi}{2} > (l_1 + l_2 + l_3 - 2) \cdot \pi$$

$$4 > l_1 + l_2 + l_3 \geqq 3.$$

Für $l_1 = l_2 = l_3 = 1$, also beim Dreieck, ist aber $A_1 + A_2 + A_3 = \pi$ im Widerspruch zu $A_1 + A_2 + A_3 \leq \frac{\pi}{2}$, womit dieser Fall als unmöglich erwiesen ist.

Wir untersuchen ferner, ob die Fälle 1) und 2) für $\delta = \frac{1}{2}$ beide zugleich möglich sind. Dies ergäbe aus 5):

$$\lambda_2 \leq \frac{1}{2},\quad \lambda_3 \leq \frac{1}{2}$$

und aus 3) unter Hinzufügung von 1):

$$\frac{l_2+l_3}{2} \geqq l_1 + l_2 + l_3 - 2$$

$$4 \geqq 2\,l_1 + l_2 + l_3 \geqq 4$$

Es können nur die Gleichheitszeichen gelten, also muss $l_1 = l_2 = l_3 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2}$ sein. Hiermit ist der Fall des rechtwinkligen Dreiecks als möglich erkannt.

A. 1) Jetzt behandeln wir den Fall, dass $\frac{\pi}{2}$ nur nach Möglichkeit 1) aus A_2 allein aufgebaut werden kann. Dann ist nach Rel. 5) $\lambda_2 \leqq \frac{1}{2}$, also nach der Gleichung 3) für die λ:

$$\frac{l_2}{2} + l_3\,\lambda_3 \geqq l_1 + l_2 + l_3 - 2$$

$$\lambda_3 \geqq 1 + \frac{2\,l_1 + l_2 - 4}{2\,l_3}$$

Hier empfiehlt es sich, für λ_3, das nur positive Werte bis 2 annimmt, folgende Gebiete zu unterscheiden:

a) $\lambda_3 < 1$, b) $\lambda_3 = 1$, c) $1 < \lambda_3 < 2$, d) $\lambda_3 = 2$.

a) Nach der Ungleichung für λ_3 ist:

$$2\,l_1 + l_2 - 4 < 0$$

$$l_1 = l_2 = 1.$$

Also erhält man die Winkel:

$$A_1 = \alpha,\ A_2 = \frac{\pi}{2n},\ A_3 = \left(1 - \frac{1}{2\,l_3\,n}\right)\cdot\pi - \frac{1}{l_3}\cdot\alpha.$$

n ist eine positive ganze Zahl. Wegen des Koëffizienten $-\frac{1}{l_3}$ von α muss A_3 bei jedem δ ein Vielfaches von l_3-mal vorkommen; dasselbe Vielfache von A_1 hinzugefügt, ergibt das Vielfache von dem Winkel $\left(l_3 - \frac{1}{2n}\right)\cdot\pi$. Da $\frac{1}{2n}$ ein echter Bruch ist, kann dieser Winkel mit $\delta\pi = \frac{\pi}{2}$ übereinstimmen.

Nun sollen aber A_1 und A_3 nicht $\frac{\pi}{2}$ aufbauen. Also müssen wir entweder A_2 hinzufügen oder ein Vielfaches des Winkels muss mit einem andern $\delta\pi$ übereinstimmen. Im letzteren Falle muss der Winkel $\left(l_3 - \frac{1}{2n}\right)\pi$ wenigstens 2 n-mal genommen werden, um ein ganzzahliges Vielfaches von π zu erhalten. Da nun für $l_3 = n = 1$ der ausgeschlossene Fall des rechtwinkligen Dreiecks herauskommt, ist eine der beiden Zahlen sicher grösser als 1. Wir wollen nun den Winkel $(2\,n\,l_3 - 1)\,\pi$ abschätzen. $2\,n\,l_3$ ist eine gerade Zahl > 2, also mindestens $= 4$; folglich ist:

$$\delta\pi \geqq (2\,n\,l_3 - 1)\,\pi \geqq 3\,\pi.$$

Da $\delta\pi$ höchstens gleich $2\,\pi$ ist, kann dieser Fall nicht möglich sein. Aber es kann noch A_2 zu dem aus A_1 und A_3 aufgebauten Winkel hinzugefügt werden. Die Winkel A_1 und A_2 müssen gleichoft auftreten und es resultiert ein Vielfaches von $l_3\,\pi$, welches $\leq 2\,\pi$ sein muss. Dies liefert entweder das Dreieck oder das Viereck mit zwei gleichen variabelen Winkeln. In beiden Fällen überzeugt man sich, dass auf keine von den bisherigen unabhängige Weise mehr ein Winkel $\delta\pi$ aufgebaut werden kann. Dann ist aber auf Grund der Anzahlrelationen und Rel. 8) die Unmöglichkeit eines Aufbaues einzusehen. Denn an Punkten der Zerlegung, wo A_3 verwendet wird, kommen die drei Winkel A_i in der Anzahl wie in einem der Polygone vor. Ausserdem muss der Winkel A_2 noch mindestens an den Quadratecken je einmal auftreten. Zu diesem A_2 fehlen aber dann die Winkel A_1 und A_3, weshalb ein Aufbau mit $\lambda_3 < 1$ unmöglich ist.

b) Es folgt nach 3) mittels $\lambda_2 \leq \frac{1}{2}$:

$$l_2\,\lambda_2 = l_1 + l_2 - 2 \geqq l_2 - 1$$

$$\frac{1}{2} \geq \lambda_2 \geqq \frac{l_2 - 1}{l_2}$$

Von den Werten $\lambda_2 = 0$ und $\frac{1}{2}$ für $l_2 = 1$ und 2 ist nur $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, $l_2 = 2$ brauchbar, wofür $l_1 = 1$ wird. Nach 2) ist nun $\mu_3 = -\frac{1}{l_3}$. Soll A_3 für $\delta = 1$ oder 2 Verwendung finden, so muss $v_3 \cdot \mu_3$ eine ganze Zahl sein, also ist $l_3 = 1$ oder 2 möglich. Dies gibt die Fälle des Vierecks oder Fünfecks mit zwei Rechten.

c) Hier ist $1 < \lambda_3 < 2$. Also kann A_3 nur beim Aufbau von 2π verwendet werden. Dabei ist aber nach 5) auch A_2 nötig. Wir bilden nun die Anzahlrelationen. A_2 wird für jedes δ $2n\delta$-mal verwendet, was 4, c_1 und c_2-mal eintrete, um $\frac{\pi}{2}$, π und 2π vollständig auszufüllen. Ausserdem werde der Winkel 2π c_3-mal durch $m_1 \cdot A_1 + m_2 \cdot A_2 + A_3$ aufgebaut. Daraus folgen die Anzahlrelationen:

$$\frac{m_1 \cdot c_3}{l_1} = \frac{4n + 2n c_1 + 4n c_2 + m_2 \cdot c_3}{l_2} = \frac{c_3}{l_3}$$

Da alle Unbekannten positiv sind, folgern wir für l_1 und l_2:

$$l_1 \geq l_3, \; l_2 \geq l_3 + 1.$$

Hiermit können wir nach Gleichung 3) für die λ schliessen:

$$l_3 (\lambda_3 - 1) = l_1 + l_2 (1 - \lambda_2) - 2 \geq l_1 + \frac{l_2}{2} - 2$$

$$\geq \frac{3}{2} (l_3 - 1).$$

Oder da für c) $\lambda_3 - 1 < 1$ ist:

$$l_3 > \frac{3}{2} (l_3 - 1), \; l_3 < 3.$$

Für $l_3 = 1$ folgt aus 3) mittels der unteren Grenze von l_2:

$$\lambda_3 = l_1 + l_2 (1 - \lambda_2) \geq l_1 + 2 (1 - \lambda_2) - 1 \geq l_1$$

Im Falle c) ist $l_1 = 1$ allein möglich. Es sei $\lambda_2 = \frac{1}{2n}$. Setzen wir $n = 1$, so folgt:

$$\lambda_3 = \frac{l_2}{2}$$

$l_2 = 3$ ist allein möglich und wir erhalten den Fall des Fünfecks mit drei Rechten. Ist dagegen $n \geq 2$, so ist:

$$2 > \lambda_3 = l_2 (1 - \lambda_2) \geq \frac{3}{4} l_2$$

$$l_2 < \frac{8}{3}, \quad l_2 = 2$$

Hier verlangen jedoch die Anzahlrelationen $n = 0$, womit dieser Fall unmöglich ist. Schliesslich folgt für $l_3 = 2$:

$$\frac{l_2}{2} + 2\,\lambda_3 \geq l_1 + l_2$$

$$4\,\lambda_3 \geq 2\,l_1 + l_2 \geq 2 \cdot 2 + 3 = 7$$

$$\lambda_3 \geq \frac{7}{4}.$$

Da λ_2 und λ_3 sich höchstens zu 2 ergänzen, ist $\lambda_2 \leq \frac{1}{4}$.

Mit diesem Werte λ_2 gehen wir nochmals in die Gleichung 3) für die λ:

$$\frac{l_2}{4} + 2\,\lambda_3 \geq l_1 + l_2$$

$$8\,\lambda_3 \geq 4\,l_1 + 3\,l_2 \geq 17$$

$$\lambda_3 \geq \frac{17}{8} > 2.$$

Die Verwendung der unteren Grenzen für l_1 und l_2 führt zu einem Widerspruch bei λ_3, weshalb $l_3 = 2$ unmöglich ist.

d) Bei $\lambda_3 = 2$ muss A_1 neben A_3 beim Aufbau von $2\,\pi$ auftreten, zugleich können beide aber in keinem andern Falle verwendet werden. Es ist also

$$(-\mu_3) \cdot A_1 + A_3 = 2\,\pi.$$

Hiermit folgt nach 3):

$$l_2\,\lambda_2 + 2\,l_3 = l_1 + l_2 + l_3 - 2$$

$$\lambda_2 = 1 + \frac{l_1 - l_3 - 2}{l_2} \leq \frac{1}{2}.$$

Der Zähler des Bruches muss negativ sein:

$$l_1 - l_3 - 2 \leq -1, \quad l_1 \leq l_3 + 1.$$

Da $l_1 : l_3$ eine ganze Zahl, nämlich $= \mu_3$, ist, sind zwei Fälle möglich:

$$1)\ l_1 = l_2, \qquad 2)\ l_1 = 2\, l_2 = 2.$$

Im ersten Falle ist:

$$l_2\, \lambda_2 = l_2 - 2,\ \lambda_2 = \frac{l_2 - 2}{l_2}.$$

Da $0 < \lambda_2 \leq \frac{1}{2}$ ist, kann λ_2 nur $= 3$ oder 4 sein, wovon der letztere Fall allein ein brauchbares Resultat liefert. So erhalten wir das System:

$$l_1 = l_3,\ l_2 = 4,\ A_1 = \alpha,\ A_2 = \frac{\pi}{2},\ A_3 = 2\,\pi - \alpha.$$

Dieser Fall erfüllt die Anzahlrelationen. Im zweiten Falle folgt nach Rel. 3):

$$l_2\, \lambda_2 + 2 = l_2 + 1$$

$$l_2\, \lambda_2 = l_2 - 1;\quad l_2 = 2,\ \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

Dies gibt den Fall des Fünfecks mit zwei Rechten.

Nunmehr sind alle Unterfälle von A. 1) erledigt, sodass wir zum noch übrigen Fall von A übergehen können.

A. 2) Beim Aufbau von $\frac{\pi}{2}$ aus A_1 und A_3 allein folgt $\lambda_3 = \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2}$. Sodann liefert die Gleichung 3) für die λ:

$$l_2\, \lambda_2 - \frac{l_3}{2} \geqq l_1 + l_2 + l_3 - 2$$

$$\lambda_2 \geqq 1 + \frac{2\, l_1 + l_3 - 4}{2\, l_2}.$$

Wir verwenden für λ_2 dieselbe Unterteilung, wie bei A. 1) für λ_3, nur dass Fall b) und d) für den konstanten Winkel A_2 wegfallen.

a) Für $\lambda_2 < 1$ folgt aus der letzten Ungleichung:

$$2\, l_1 + l_3 - 4 = -1$$

$$l_1 = l_3 = 1.$$

Mittels ähnlicher Überlegungen wie bei A. 1) a) schliessen wir die Unmöglichkeit eines Polygones.

c) Hier ist λ_2 zwischen 1 und 2 gelegen. Wir können also A_2 nur für den Aufbau von 2π verwenden und müssen dazu auch A_1 und A_3 heranziehen. Dann können wir aus den Anzahlrelationen schliessen:

$$l_1 \geqq l_2 + 1, \quad l_3 \geqq l_2 + 1.$$

Wenden wir dies auf Gleichung 3) für die λ an und ersetzen λ_2 und λ_3 durch ihre oberen Grenzen:

$$2\,l_2 + \frac{l_3}{2} > l_1 + l_2 + l_3 - 2$$
$$2\,l_2 > 2\,l_1 + l_3 - 4 \geqq 3\,l_2 - 1$$
$$1 > l_2.$$

Dies ist ein Widerspruch gegen Rel. 1), weshalb auch hier kein Polygon existieren kann. Der Fall A hat hiermit seine vollständige Erledigung gefunden.

B. Im Fall B sind μ_2 und $\mu_3 \neq 0$. Wir bestimmen wieder die Möglichkeiten, den Winkel $\delta\pi$ aufzubauen. Es sind dies: 1) aus A_1, A_2, A_3; 2) aus A_1 und A_2; 3) aus A_1 und A_3; 4) aus A_2 und A_3. Dass nun B. 1) für $\delta = \frac{1}{2}$ unmöglich ist, lässt sich wie für A. 3) beweisen. Die Fälle 2) und 3) sind, wenn nicht gleichzeitig vorliegend, identisch. Im übrigen lässt sich zeigen, dass für $\delta = \frac{1}{2}$ nie zwei der drei letzten Fälle gleichzeitig auftreten können. Der Beweis lässt sich durch Indicesvertauschung auf den Fall zurückführen, wo 2) und 3) gleichzeitig vorliegen. Hier folgt:

$$A_1 + A_2 \leq \frac{\pi}{2}, \qquad A_1 + A_3 \leq \frac{\pi}{2}$$
$$2\,A_1 + A_2 + A_3 \leqq \pi$$
$$A_1 + A_2 + A_3 < \pi.$$

Bezeichnen wir nun die l_i ihrer Grösse nach:

$$l' \geqq l'' \geqq l'''$$

so folgt aus der ursprünglichen Gleichung 3):

$$l'\,\pi \geq \pi\,(l' + l'' + l''' - 2) \geq l'\,\pi.$$

Es folgt die Gleichheit der l_i mit 1. Beim Dreieck ist aber die Winkelsumme $= \pi$ und nicht kleiner als π, wie aus den Voraussetzungen gefolgert war.

Jetzt können wir B) nach den Fällen einteilen, die für $\delta = \frac{1}{2}$ eintreten. Da 2) und 3) identisch sind, bleiben nur noch 2) und 4). Fall B. 2) zerfällt aber in zwei Unterfälle, deren einer mit B. 4) identisch ist. Denn wir können bei B. 2) stets erreichen, dass μ_2 und μ_3 negativ sind. Wäre nämlich μ_3 positiv, so würden wir A_2 zum Parameter α' machen. Weil A_1 und A_2 den Winkel $\frac{\pi}{2}$ aufbauen, ist μ_2 stets negativ, also wenn $|\mu_2|$ der absolute Betrag von μ_2 ist:

$$\alpha' = \lambda_2 \pi - |\mu_2| \cdot \alpha = A_1'$$

$$A_1 = \alpha = \frac{\lambda_2 \pi - \alpha'}{|\mu_2|} = \lambda'_2 + \mu'_2 \cdot \alpha'$$

$$A_3 = \left(\lambda_3 + \frac{\mu_3}{|\mu_2|} \cdot \lambda_2\right) \cdot \pi - \frac{\mu_3}{|\mu_2|} \alpha' = \lambda'_3 + \mu'_3 \cdot \alpha'.$$

Hier sind μ'_2 und μ'_3 negativ, also können wir schon für A_2 und A_3 die μ als negativ voraussetzen. In diesem Falle wollen wir A_3 zum neuen Parameter β machen. Es werden A_1 und A_2:

$$A_1 = \frac{-\lambda_3 \pi + \beta}{\mu_3} = B_2, \quad A_2 = \frac{\lambda_2 \mu_3 - \lambda_3 \mu_2}{\mu_3} \cdot \pi + \frac{\mu_2}{\mu_3} \cdot \beta = B_3.$$

Fall B. 2) zeigt sich identisch mit B. 4), wenn B_1, B_2, B_3 ebenso Winkel in Normalform sind, wie A_1, A_2, A_3, wenn also:

B. 4) $$\lambda_2 \mu_3 - \lambda_3 \mu_2 < 0.$$

Dieser neuen Definition des Falles B. 4) als Unterfalles von B. 2) stellen wir die engere des Falles B. 2) gegenüber:

B. 2) $$\lambda_2 \mu_3 - \lambda_3 \mu_2 > 0.$$

B. 2) In diesem Falle transformieren wir noch wieder zurück, sodass:

$$\mu_2 < 0, \quad \mu_3 > 0$$

Dabei ist $\lambda_3 > 0$ und wenn wir, wie oben, in die Fälle a), b), c), d) für λ_3 einteilen, so ist d) wegen $A_4 > 2\pi$

unmöglich. Für b) und c) ist $A_4 > \pi$, weshalb diese Fälle zusammen behandelt werden können.

a) Hier folgern wir wie oben:

$$2\,l_1 + l_2 - 4 = -1$$
$$l_1 = l_2 = 1$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{2\,n}, \quad \lambda_3 = 1 - \frac{1}{2\,n\,l_3}.$$

Für $l_3 > 2$ kann $2\,\pi$ nicht aufgebaut werden, weil $2\,\lambda_3 + \lambda_2 > 2$ ist und $\lambda_3 + m\,\lambda_2 = 2$ kein ganzzahliges m liefert. Aus denselben Gründen kann A_3 bei $l_3 = 2$ nur für $\delta = 2$ und auf eine Weise erscheinen, was gegen die Anzahlrelationen verstösst. Für $l_3 = 1$ lassen wir uns von den Möglichkeiten, $2\,\pi$ aufzubauen, zu den sämtlichen unabhängigen Möglichkeiten, $\delta\,\pi$ aufzubauen, führen. Also sei

$$\nu_2\,\lambda_2 + \nu_3\,\lambda_3 = 2$$
$$\frac{\nu_2}{2\,n} + \nu_3\left(1 - \frac{1}{2\,n}\right) = 2$$
$$n = \frac{\nu_3 - \nu_2}{2\,(\nu_3 - 2)}.$$

Sei $\nu_3 = 1$, dann folgt $\nu_2 = 1 + 2\,n$. Hierbei wird π mittels der beiden bekannten Möglichkeiten aufgebaut. Sei ferner $\nu_3 \geqq 3$, so folgt für $n \geqq 1$:

$$\nu_3 - \nu_2 \geqq 2\,\nu_3 - 4$$
$$3 \leq \nu_3 \leq 4 - \nu_2$$
$$\nu_2 = 1,\ \nu_3 = 3,\ n = 1$$
$$\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2}.$$

Also bestehen die drei fundamentalen Relationen:

$$n' \cdot A_1 + A_2 = \frac{\pi}{2}$$
$$A_1 + A_2 + A_3 = \pi$$
$$n''\,A_1 + A_2 + 3\,A_3 = 2\,\pi.$$

Nach den Anzahlrelationen muss $n'' = 0$ sein, also $\mu_2 = -3\mu_3$ und nach Gleichung 3) für die μ:

$$1 + \frac{2}{3}\,\mu_2 = 0, \quad \mu_2 = -\frac{3}{2} = -n'.$$

Der Widerspruch gegen die Ganzzahligkeit von μ_2 macht den Fall unmöglich.

b) und c). Hier kann A_2 nicht wenigstens zweimal neben A_3 auftreten. Dann folgte aus den Anzahlrelationen und mit Rel. 3):

$$l_2 \geq 2\, l_3 + 1$$

$$\frac{l_2}{2} + 2\, l_3 > l_1 + l_2 + l_3 - 2$$

$$2\, l_3 > 2\, l_1 + l_2 - 4 \geq 2\, l_1 + 2\, l_3 - 3$$

$$l_1 = 1.$$

Weil A_3 nur einmal bei 2π auftritt, muss A_2 stets gleich oft dabei verwendet werden, damit $\lambda_3 + m\,\lambda_2 = 2$ sei. A_1 kann hier nicht auftreten, da $l_1 = 1 \geq l_3 + 1$ sein müsste. Also ist:

$$m \cdot \mu_2 + \mu_3 = 0$$

$$1 + (l_2 - m\, l_3)\, \mu_2 = 0.$$

Nun lässt sich aber auch folgern, dass beim Maximum von $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ und mit $l_1 = 1$ nur $l_2 = 2\, l_3 + 1$ möglich ist. Da μ_2 negativ ist, muss $m = 2$ sein und $\mu_2 = -1$. λ_3 nimmt jetzt den Wert an:

$$\lambda_3 = \frac{3\, l_3 - (2\, l_3 + 1) \cdot \frac{1}{2\,n}}{l_3}.$$

Soll $\lambda_3 < 2$ sein, so ist erforderlich:

$$2\, n\, l_3 < 2\, l_3 + 1.$$

n muss den Wert 1 erhalten. $\lambda_2 + \lambda_3$ ist aber dann stets < 2, weshalb A_2 nicht zweimal neben A_3 verwendbar ist.

Also kann nur noch $A_2 + A_3 = 2\pi$ sein, oder nach Gleichung 3):

$$(l_2 - l_3)\, \lambda_2 = l_1 + (l_2 - l_3) - 2$$

$$\frac{l_2 - l_3}{2} \geq l_1 + (l_2 - l_3) - 2$$

$$4 \geq 2\, l_1 + (l_2 - l_3)$$

$$l_1 = 1,\ \lambda_2 = \frac{1}{2},\ l_2 - l_3 = 2.$$

Aus Gleichung 3) für die μ folgt jetzt $\mu_2 = -\frac{1}{2}$, weshalb sich $\frac{\pi}{2}$ nicht mit A_2 aufbauen lässt. Also liefert B. 2) keinen möglichen Fall.

B. 4) Hier soll der Aufbau von $\frac{\pi}{2}$ aus A_2 und A_3 erfolgen. Dann ist, wenn ausserdem Gleichung 3) berücksichtigt wird:

$$\lambda_2 < \frac{1}{2}, \quad \lambda_3 < \frac{1}{2}$$

$$\frac{l_2 + l_3}{2} > l_1 + l_2 + l_3 - 2$$

$$4 > 2\,l_1 + l_2 + l_3 \geq 4.$$

Dies ist aber ein Widerspruch, also existiert hier wie überhaupt im Fall B. keine Zerlegung.

Das Resultat unserer Untersuchungen lässt sich folgendermassen zusammenfassen:

„Die Polygone gleichen Gerüsts mit 3 verschiedenen Winkeln, aus denen sich eine Zerlegung herleiten lassen kann, sind:

1. das rechtwinklige Dreieck;
2. das Viereck mit zwei Rechten;
3. Fünfecke mit zwei und drei Rechten;
4. $(2\,l + 4)$-Ecke mit vier Rechten."

§ 6. Eine Erweiterung auf Polygone mit vier verschiedenen Winkeln.

Bevor wir mit der Diskussion der in § 5 gewonnenen Lösungen beginnen, wollen wir für den Fall von Polygonen gleichen Gerüsts noch die Möglichkeit erörtern, dass vier Winkel verwendet werden, welche von zwei Parametern linear abhängen. Hierbei mögen die Relationen des § 2 sämtlich gelten, nur dass wieder C_1 vollständig unbestimmt bleibt. Nach den am Anfang des § 5 gemachten Überlegungen wird damit auch der Fall von drei Parametern erledigt.

Wie in § 5 bringen wir die Winkel auf eine Normalform aus folgender ursprünglichen Form:

$$A_i = \lambda_i \pi + \mu_i \cdot \alpha + \mu'_i \cdot \beta, \quad (i = 1, 2, 3, 4.)$$

Hier müssen mindestens zwei Winkel unabhängig variabel sein, sodass wir sie zu unabhängigen Parametern machen können, z. B. $A_1 = \alpha$, $A_2 = \beta$. Ferner können wir so transformieren, dass λ_3 und λ_4 positiv sind. Die Gleichungen 3) und 5) zerfallen hier je in drei Gleichungen, je eine für die λ, μ und μ'. Sei nun λ_3 negativ, womit λ_4 nach Rel. 3) für die λ positiv ist. Ferner muss wenigstens μ_3 oder μ'_3 nach Rel. 2) positiv sein, da A_3, α und β positiv sind, sei z. B. $\mu_3 > 0$. Dann wählen wir A_3 als neuen Parameter $\bar{\alpha}$:

$$\bar{\alpha} = \lambda_3 \pi + \mu_3 \alpha + \mu'_3 \beta = A'_1$$

$$\alpha = \frac{1}{\mu_3}\{-\lambda_3 \pi + \bar{\alpha} + \mu'_3 \beta\} = A'_3 = \bar{\lambda}_3 \pi + \bar{\mu}_3 \bar{\alpha} + \bar{\mu}'_3 \beta.$$

Hieraus folgt für A_4:

$$A_4 = \frac{(\lambda_4 \mu_3 - \lambda_3 \mu_4)\pi + \mu_4 \bar{\alpha} + (\mu_3 \mu'_4 - \mu_4 \mu'_3)\beta}{\mu_3} = A'_4 = \bar{\lambda}_4 \pi + \ldots$$

Ist $\bar{\lambda}_4 \geqq 0$, so ist unser Ziel erreicht. $\bar{\lambda}_4$ kann aber nur dann negativ sein, wenn μ_4 negativ ist, da λ_4, λ_3 und $\mu_4 \geqq 0$ sind. Zugleich ist bei $\bar{\lambda}_4 < 0$ auch $\bar{\mu}_4 < 0$ und daher $\mu'_4 > 0$. In diesem Falle transformieren wir weiter: $A'_4 = \beta$:

$$\bar{\beta} = \bar{\lambda}_4 \pi + \bar{\mu}_4 \bar{\alpha} + \bar{\mu}'_4 \cdot \beta = A''_2$$

$$\beta = \frac{1}{\mu'_4}\{-\bar{\lambda}_4 \pi - \bar{\mu}_4 \bar{\alpha} + \bar{\beta}\} = A''_4.$$

Hieraus folgt für A_1:

$$A_1 = \frac{(\bar{\lambda}_4 \mu'_3 - \lambda_3 \bar{\mu}'_4)\pi + (\bar{\mu}'_4 + \mu'_3 \bar{\mu}_4) \cdot \bar{\alpha} - \mu'_3 \bar{\beta}}{\mu_3 \mu'_4} = A''_3.$$

In diesem Winkel kann der transformierte Wert λ nur negativ sein, wenn $\mu'_3 > 0$ ist. Nach $\mu_3 \mu'_4 - \mu_4 \mu'_3 = \mu_3 \mu'_4 > 0$ ist $\mu'_4 > 0$ hierbei ausgeschlossen. Also sind μ'_3 und $\mu'_4 > 0$ allein einem positiven Werte λ hinderlich;

dieser Fall findet aber seine Erledigung durch die alleinige Transformation $A_3 = \overline{\beta}$. Damit ist auch für unseren letzten Fall die aufgestellte Behauptung erwiesen. Von λ_3 und λ_4 lässt sich nach Rel. 4) und 5) noch zeigen, dass ihre obere Grenze 2 ist. Nunmehr können wir zusammenfassen:

„Sind A_1, A_2, A_3, A_4 die von den Parametern α und β abhängigen positiven Winkel, so lassen sie sich auf die Normalform bringen:

$$A_1 = \alpha$$
$$A_2 = \beta$$
$$A_3 = \lambda_3 \pi + \mu_3 \alpha + \mu'_3 \beta$$
$$A_4 = \lambda_4 \pi + \mu_4 \alpha + \mu'_4 \beta,$$

wobei λ_3 und λ_4 positiv oder Null sowie $\leqq 2$ sind."

Den weiteren Gang der Untersuchungen wollen wir nur kurz skizzieren. Bei der Elimination der ν treten mehrere Determinanten auf, die nicht sämtlich verschwinden dürfen. Vor allen müssen λ_3 und $\lambda_4 \neq 0$ sein. Darauf findet eine Einteilung des Problemes in 4 Unterfälle statt, je nachdem, wie viele und welche $\mu = 0$ sind. Jeder Unterfall wird nach den Aufbaumöglichkeiten des Winkels $\delta\pi$ untersucht. Der Aufbau von $\delta = \frac{1}{2}$ gibt Veranlassung zur Einteilung der Werte eines λ in die Gruppen a, b, c, d des § 5, von denen aber nur c) und d) in Frage kommen. Mittels wesentlich einfacherer Schlüsse als im § 5 gelangen wir so zu dem Resultate:

„Die Polygone gleichen Gerüsts, welche vier verschiedene von zwei Parametern abhängige Winkel haben und mit denen sich ein Zerlegungsbeweis geben lassen kann, sind die Fünfecke mit zwei Rechten."

§ 7. Über die Möglichkeit von Beweisen des Pythagoräischen Satzes mittels der gefundenen Polygone.

Wir wollen jetzt einige Untersuchungen über die in den §§ 5 und 6 aufgefundenen Polygone in Bezug auf die

Möglichkeit eines Aufbaues von Quadraten anstellen, bei denen wir in zwei Fällen die Unmöglichkeit zeigen.

Es sind fünf verschiedene Arten von Polygonen zu untersuchen: 1) das rechtwinklige Dreieck; 2) das Viereck mit zwei Rechten; 3) und 4) das Fünfeck mit zwei und drei Rechten; 5) $(2\,l + 4)$-Ecke mit vier Rechten und l Paaren sich zu $2\,\pi$ ergänzender Winkel.

Hier können wir für Fall 2) eine Zerlegung angeben, im Anschluss an die aus Beweis 1) abzuleitenden Zerlegungsbeweise (§ 3). Ebene I und II liegen dabei so übereinander, dass die Quadratecken von C mit den Mittelpunkten der grösseren Quadrate unter den A und B zusammenfallen. Ebenso wie hierbei das grössere Quadrat in Vierecke mit zwei Rechten zerlegt ist, lässt sich das kleinere Quadrat zerlegen, womit ein Zerlegungsbeweis aus Vierecken mit zwei Rechten gefunden ist. Auf die Aufgabe, alle hier möglichen Beweise zu suchen, gehen wir nicht ein.

Wir können nun den Fall 3) des Fünfecks mit zwei Rechten als unbrauchbar erweisen. Unabhängig von der Zahl der Parameter ist stets aus allen Winkeln ausser den zwei Rechten der Winkel $2\,\pi$ aufzubauen, sodass der Winkel π nur aus zwei Rechten entstehen kann. Lagern wir nun ein erstes Fünfeck an einer Quadratecke an, so hat das Fünfeck notwendig einen Rechten an dieser Ecke. Wenigstens auf den hier zusammenstossenden Quadratseiten hat das Fünfeck einen Teil seines Umfanges mit dem Quadrate gemein. Da sich auf dem Quadratumfange nur Ecken des Fünfecks mit anliegenden Rechten befinden können, müssen gemeinsame und nicht gemeinsame Teile der Umfänge von Quadrat und Fünfeck in zwei Randpunkten zusammenhängen, an denen unser Fünfeck also noch zwei Rechte hat. So enthielte es wenigstens drei Rechte, im Widerspruch zur wirklichen Zahl, weshalb eine Zerlegung des Quadrats nicht existieren kann.

Der eben durchgeführte Unmöglichkeitsbeweis zeigt, dass ein Quadrat schon eher aus Fünfecken mit drei Rechten

aufgebaut werden kann. Tatsächlich ist dies auch schon bei acht Fünfecken möglich, nach Untersuchungen in einem folgenden § wahrscheinlich der geringsten Anzahl von konvexen Fünfecken, in die sich ein konvexes Viereck zerlegen lässt. Nach der Anordnung der Winkel gibt es vier verschiedene Arten von Fünfecken mit drei Rechten, die aber ebensogut konvex wie konkav sein können. Auf nähere Untersuchungen im Fall des Fünfecks mit drei Rechten wie auch der noch komplizierteren $(2\,l + 4)$-Ecke, die ebenfalls Quadrate aufzubauen gestatten, wollen wir jedoch nicht eingehen, da schon ein Zerlegungsbeweis aus Fünfecken das Hypotenusenquadrat vermutlich in wenigstens $2 \cdot 8 = 16$ Fünfecke zerlegen liesse.

Seiner Einfachheit halber verdient der Fall 1) das grösste Interesse. Der sehr allgemeine Begriff des Gerüsts eines Polygones verengert sich hier zum Begriff ähnlicher Polygone. Wir stellen uns nun die Aufgabe, nachzuweisen, dass ein Quadrat sich nicht aus ähnlichen veränderlichen Dreiecken aufbauen lässt. Hiermit behandeln wir, wie schon in der Einleitung bemerkt, die Verallgemeinerung einer Fragestellung von Herrn M. Dehn (Math. Ann. Bd. 57) für einen speziellen Fall. Die Frage: „Gibt es eine eingliedrige Schar von Figuren, etwa Dreiecken, aus deren Gliedern sich jedes Polygon zusammensetzen lässt“, wird nämlich dahin verallgemeinert, dass die aufbauenden Figuren bei stetiger Veränderung auch unter der Abhängigkeit ihrer Bestimmungsstücke von einem oder mehr Parametern den Aufbau leisten sollen. In unserem Falle eines Parameters zeigt sich die Unmöglichkeit.

Bevor wir mit dem Beweise beginnen, wollen wir über die Möglichkeiten, Rechtecke aus rechtwinkligen Dreiecken aufzubauen, einiges mitteilen. Sei α der Parameter der Dreiecke, etwa der kleinere spitze Winkel. Die zum Aufbau verwendeten Dreiecke können einander ähnlich oder auch symmetrisch ähnlich sein. Die Höhe auf der Hypotenuse zerlegt z. B. ein rechtwinkliges Dreieck in zwei ihm sym-

metrisch ähnliche Dreiecke. Aus zwei kongruenten Dreiecken lässt sich ein Rechteck vom Seitenverhältnis $\sin\alpha : \cos\alpha$ aufbauen. Durch parallele Anlagerung solcher Rechtecke erhält man Rechtecke vom Seitenverhältnis $r_1 \cdot \sin\alpha : r_2 \cdot \cos\alpha$, r_1 und r_2 ganze Zahlen. Zu komplizierteren Seitenverhältnissen gelangt man, wenn zwei solche Rechtecke ein Rechteck aufbauen, deren eines gegen das andere um 90^0 gedreht ist. Durch Zusammensetzung derartiger Rechtecke gelangt man zu Seitenverhältnissen $S_1 : S_2$, wo die S homogene ganze rationale Funktionen von beliebig hohem Grade in $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ sind. Doch können hierbei die Seiten der verwendeten Dreiecke nur in sechs verschiedenen Richtungen liegen. Dass die Zahl dieser Richtungen aber auch beliebig grosse endliche Werte annehmen kann, zeigt folgendes Verfahren. An einem der konstruierten Rechtecke mögen in zwei gegenüberliegenden Ecken Geraden im Winkel α gegen eine Rechteckseite, an den übrigen Ecken Geraden im Winkel $\frac{\pi}{2} + \alpha$ gezeichnet werden, die nicht durchs Rechteck gehen. Die gezogenen Geraden schliessen ein Rechteck ein, in dem zwei neue Richtungen der Dreieckseiten vorhanden sein können. Durch beliebig häufige Wiederholung dieses Verfahrens im gleichen Drehungssinne erhält man Dreiecksseiten in beliebig vielen Richtungen.

Die hiermit gegebenen Beispiele, aus rechtwinkligen Dreiecken Rechtecke aufzubauen, gestatten, beliebig einfache und komplizierte Zerlegungen herzustellen. An einem Beispiel möge nun noch das Seitenverhältnis eines aufgebauten Rechtecks berechnet werden. Die Seiten mögen S_a und S_b sein. Es mögen zwei Rechtecke mit Seitenverhältnissen $p_1 \cdot \cos\alpha : q_1 \cdot \sin\alpha$ und $p_2 \cdot \cos\alpha : q_2 \cdot \sin\alpha$ angelagert werden, und zwar sei $p_1 \cdot \cos\alpha \parallel S_a$, $q_1 \cdot \sin\alpha \parallel S_b$. p_1, p_2, q_1, q_2 seien ganze Zahlen. Damit die beiden Rechtecke eine gemeinsame Seite haben, werden wir die Längen des zweiten Rechtecks im Verhältnis $1 : A$ vergrössern. Die Rechtecke

mögen mit Seiten proportional $q_1 \cdot \sin\alpha$ und $p_2 \cdot \cos\alpha$, also $\parallel S_b$ angrenzen. Dann ist:

$$q_1 \sin\alpha = A \cdot p_2 \cos\alpha$$

$$A = \frac{q_1 \sin\alpha}{p_2 \cos\alpha}.$$

Also erhalten wir für die Seiten:

$$S_a = p_1 \cos\alpha + \frac{q_1 \sin\alpha}{p_2 \cos\alpha} \cdot q_2 \sin\alpha, \quad S_b = q_1 \sin\alpha$$

oder:

$$S_a : S_b = (p_1\, p_2 \cos^2\alpha + q_1\, q_2 \sin^2\alpha) : p_2\, q_1 \sin\alpha \cos\alpha.$$

S_a und S_b sind homogenen ganzen rationalen quadratischen Funktionen von $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ proportional.

Jetzt wollen wir den Beweis führen, dass ein Rechteck niemals konstantes Seitenverhältnis haben kann, wenn es aus Rechtecken vom Seitenverhältnis $\cos\alpha : \sin\alpha$ aufgebaut ist. Dies behauptet einen Teil des aufgestellten Unmöglichkeitssatzes. Seien in einer Zerlegung eines Rechtecks n Rechtecke verwendet mit Seiten proportional a_1, b_1; a_2, b_2; . . a_n, b_n; die Seiten des aufgebauten Rechtecks mögen S_a und S_b sein. Alle Seiten a sowie alle Seiten b mögen unter sich gleiche Richtung haben. Die a_i und b_i seien stets $p_i \cdot \cos\alpha$ und $q_i \cdot \sin\alpha$ oder $p_i \cdot \sin\alpha$ und $q_i \cdot \cos\alpha$, wobei p_i und q_i ganze Zahlen sind. Um zu den wirklichen Rechtecken der Zerlegung zu gelangen, vergrössern wir alle Längen des i-Rechtecks im Verhältnis $1 : A_i$. Im aufgebauten Rechteck gibt es nun Strecken, längs deren Rechteckseiten zusammenstossen, und zwar in den beiden verschiedenen Richtungen a und b. Zu beiden Seiten einer Strecke liegen Rechteckseiten in gleicher Gesamtlänge, woraus Relationen folgender Art fliessen:

$$A_i \cdot a_i + A_k \cdot a_k + \ldots - A_p \cdot a_p - A_q \cdot a_q - \ldots = 0$$
$$A_{i'} \cdot b_{i'} + A_{k'} \cdot b_{k'} + \ldots - A_{p'} \cdot b_{p'} - A_{q'} \cdot b_{q'} - \ldots = 0.$$

Das vorliegende Rechteck hat einen Freiheitsgrad, also bestehen (n — 1) Relationen. Dies lässt sich folgendermassen einsehen. Es sind genau (n — 1) Relationen, wenn in der

Zerlegung nur Randpunkte vorhanden sind. Aus der Winkelsumme W bei N′ Randpunkten und N″ Innenpunkten:

$$W = (2 + N' + 2\,N'')\,\pi$$

in den n Rechtecken erhält man für $N'' = 0$, weil für die n Rechtecke $W = 2\,n\,\pi$ ist, $N' = 2\,(n - 1)$. Die Randpunkte ordnen sich in Paaren von je zweien, für deren Verbindungsstrecke eine Relation besteht, also gibt es $(n - 1)$ Relationen. Beim Vorhandensein von Innenpunkten wird die Strecke, welche zu einer Relation Anlass gibt, stets so gewählt, dass auf ihr kein Innenpunkt liegt. Jeder Innenpunkt ist also der eine Endpunkt von vier Strecken, für die eine Relation besteht. Mithin geben die Innenpunkte $2\,N''$, die Randpunkte $\frac{N'}{2}$ Relationen; im ganzen erhält man $\frac{N'}{2} + 2\,N'' =$ $(n - 1) + N''$ Relationen. Die Relationen für die vier in einem Innenpunkte zusammenstossenden Strecken sind linear abhängig und genau eine davon ist überflüssig; denn sonst folgte, dass die A_i der vier im Innenpunkte zusammenstossenden Rechtecke $= 0$ wären; die vier Relationen haben die Form:

$$\begin{aligned}
A_p \cdot a_p + \ldots - A_q \cdot a_q - \ldots &= 0\\
A_q \cdot b_q + \ldots - A_r \cdot b_r - \ldots &= 0\\
A_r \cdot a_r + \ldots - A_s \cdot a_s - \ldots &= 0\\
A_s \cdot b_s + \ldots - A_p \cdot b_p - \ldots &= 0.
\end{aligned}$$

Lässt man also für jeden Innenpunkt eine der vier Relationen weg, so hinterbleibt ein System von $(n - 1)$ unabhängigen homogenen linearen Gleichungen für die n Grössen A_i.

Schreiben wir die Koëffizienten in eine Matrix von $(n - 1)$ Zeilen und n Kolonnen, so gibt die Streichung der i-Kolonne eine Determinante, die mit $(-1)^i$ multipliziert zu A_i proportional ist und am einfachsten mit A_i identifiziert wird. Unser erstes Ziel ist nun der Nachweis, dass A_i stets eine gerade oder ungerade Funktion von $\cos\alpha$ wie $\sin\alpha$ ist. Zunächst beweisen wir den Satz:

Satz 1. A_i ist eine homogene lineare Funktion in den a_k und b_k, die in den a isobar ist ebenso wie in den b.

Da a_k und b_k nur mit A_k multipliziert auftreten, stehen sie nur in der k-Kolonne der Matrix. Ausser der 0 stehen hier aber nur diese Grössen, da A_k in keiner andern Verbindung in den Relationen auftritt. Sobald $k \neq i$ ist, muss A_i also in a_k und b_k linear und homogen sein. Zugleich enthält eine Zeile nur Grössen a oder b, da nur Strecken gleicher Richtung in einer linearen Relation auftreten. Da jeder Summand der Determinante für A_i aus jeder Zeile ein Element als Faktor enthält, ist die Anzahl der a unveränderlich dieselbe in allen Summanden und dies gilt auch für die b. Also ist A_i auch in der angegebenen Weise isobar. Alle Teile von Satz 1. sind damit erwiesen. Wir können ferner leicht beweisen:

Satz 2. Jedes A_i enthält nur gerade oder ungerade Potenzen von $\sin \alpha$ wie $\cos \alpha$.

Zum Beweise betrachten wir zwei beliebige Summanden S_1 und S_2 der Determinante für A_i, die also in den a und b isobar sind. Eine Reihe von Faktoren a und b wird in S_1 und S_2 als gemeinsamer Faktor P enthalten sein. Im übrigen enthält das eine Glied den Faktor a_k, das andere den Faktor b_k aus der k-Kolonne. Die beiden Glieder sind bis aufs Vorzeichen:

$$S_1 = P \cdot a_i \cdot a_k \cdot \ldots \cdot b_p \cdot b_q \cdot \ldots$$
$$S_2 = P \cdot b_p \cdot b_q \cdot \ldots \cdot a_i \cdot a_k \cdot \ldots$$

Die Anzahl der a ist in S_1 und S_2 dieselbe, also auch in $\frac{S_1}{P}$ und $\frac{S_2}{P}$. Mithin ist die Zahl der i, k, ... gleich der der p, q, ... Wir vergleichen nun die beiden Faktoren $a_i \cdot b_p$ und $b_i \cdot a_p$. Die Bezeichnung der a und b sei so gewählt, dass:

$$a_i = p_1 \cdot \cos \alpha, \quad b_i = q_1 \cdot \sin \alpha.$$

Dann sind bezüglich a_p und b_p zwei Fälle möglich:

1) $\begin{cases} a_p = p'_2 \cdot \cos \alpha \\ b_p = q'_2 \cdot \sin \alpha \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a_p = p''_2 \sin \alpha \\ b_p = q''_2 \cos \alpha \end{cases}$

Also werden die Produkte $a_i \cdot b_p$ und $b_i \cdot a_p$:

$$1)\ \begin{cases} a_i \cdot b_p = p_1 q'_2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \\ b_i \cdot a_p = q_1 p'_2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} a_i \cdot b_p = p_1 q''_2 \cdot \cos^2\alpha \\ b_i \cdot a_p = q_1 p''_2 \cdot \sin^2\alpha \end{cases}$$

In beiden Fällen unterscheiden sich $a_i \cdot b_p$ und $b_i \cdot a_p$ höchstens um eine gerade Anzahl von Potenzen cos α wie sin α. Dies gilt ebenso für $a_k \cdot b_q$ und $b_k \cdot a_q$ u. s. w., sowie für die Produkte dieser beiden Grössenreihen, d. h. für $\frac{S_1}{P}$ und $\frac{S_2}{P}$, sowie für S_1 und S_2 selbst. Da S_1 und S_2 aber zwei beliebige Glieder der Summe für A_1 sind, so enthält A_1 nur Summanden, die sich um gerade Potenzen von cos α wie sin α unterscheiden, wie Satz 2. behauptet.

Wir berechnen ferner die Seiten S_a und S_b. Diese werden in derselben Weise als Längen der von einer Rechteckecke ausgehenden Seite dargestellt, wie die Strecken, welche zur Aufstellung der linearen Relationen Veranlassung geben. Hat das Rechteck an dieser Ecke das Seitenverhältnis $a_1 : b_1$, so erhält man S_a und S_b:

$$S_a = A_1 \cdot a_1 + A_i \cdot a_i + \ldots$$
$$S_b = A_1 \cdot b_1 + A_p \cdot a_p + \ldots$$

Hieraus folgt, dass S_a und S_b sich als Determinanten darstellen lassen, indem zur Matrix noch je eine n-Zeile hinzutritt. Daraus folgen für S_a und S_b ganz entsprechende Sätze wie für A_1, nämlich:

Satz 3. S_a und S_b sind je homogene lineare Funktionen von a_k und b_k, die in den a isobar sind, ebenso wie in den b.

Satz 4. S_a wie S_b enthalten nur gerade oder ungerade Potenzen von cos α wie sin α.

Die Beweise sind genau wie für A_1 zu führen. Nun wissen wir, dass jeder Summand von S_a wie S_b anzeigt, ob gerade oder ungerade Potenzen von sin α wie cos α auftreten. Es ist A_1 ($\neq 0$) in der Formel für S_a wie S_b enthalten, woraus wir ein Glied zum Vergleich von S_a und S_b

entnehmen. Dies ist in S_a mit a_1, in S_b mit b_1 multipliziert. Ist nun $a_1 = p_1 \cdot \cos \alpha$, $b_1 = q_1 \cdot \sin \alpha$, so enthält z. B. S_a die geraden, S_b die ungeraden Potenzen von $\cos \alpha$, weil die herausgegriffenen Vergleichselemente sich so unterscheiden. Entsprechendes gilt für die Potenzen von $\sin \alpha$. Man erkennt also:

Satz 5. Unter den Funktionen S_a und S_b enthält die eine die geraden, die andere die ungeraden Potenzen von $\cos \alpha$ wie $\sin \alpha$.

Nunmehr ersetzen wir $\cos \alpha$ durch x, $\sin \alpha$ durch $\sqrt{1-x^2}$ und erhalten, wenn S_a die ungeraden Potenzen von $\sin \alpha$ enthält, für S_a eine ganze rationale Funktion $P_{(x)}$ vom Grade $n - 2r_1 - 1$, wenn r_1-mal durch einen Faktor $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ der Grad um 2 erniedrigt ist, multipliziert mit $\sqrt{1-x^2}$; entsprechend ist S_b eine ganze rationale Funktion $Q_{(x)}$ vom Grade $(n - 2r_2)$ in x. Soll nun das Verhältnis $S_a : S_b$ konstant $= C : 1$ sein, so folgt:

$$C = \frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}} \cdot \sqrt{1-x^2}$$

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{C \cdot Q_{(x)}}{P_{(x)}}.$$

Also müsste $\sqrt{1-x^2}$ einer gebrochenen rationalen Funktion gleich sein, was unmöglich ist. Dieser Widerspruch zeigt die Unmöglichkeit des Aufbaues eines Rechteckes von konstantem Seitenverhältnis aus Rechtecken vom Seitenverhältnis $\cos \alpha : \sin \alpha$.

Wir wollen nun diesen Beweis für den Fall verallgemeinern, dass die Seiten der zum Aufbau des Rechtecks verwendeten rechtwinkligen Dreiecke in beliebig vielen Richtungen liegen. Zum Aufbau seien n Dreiecke mit Seiten im Verhältnis $b_i : c_i : d_i = \cos \alpha : \sin \alpha : 1$ verwendet. Die Seiten mögen in m verschiedenen Richtungen liegen, $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, . . . $a^{(m)}$. Das i-Dreieck D_i möge seine Seiten in den Richtungen $a^{(p)}$, $a^{(q)}$, $a^{(r)}$ haben und die ihnen proportionalen b_i, c_i, d_i mögen durch einen Index i, $a_i^{(k)}$ angezeigt werden. Um von

den b_i, c_i, d_i zu den wirklichen Seiten von D_i zu gelangen, werden alle Längen im Verhältnis $1 : A_i$ vergrössert. Im Rechteck gibt es nun Strecken, längs derer Dreiecksseiten zusammenstossen. Diese Strecken können m verschiedene Richtungen haben. Zu beiden Seiten einer Strecke liegen Dreiecke mit Seiten in gleicher Gesamtlänge, woraus sich Relationen folgender Art ergeben:

$$A_i \cdot a_i^{(l)} + A_k \cdot a_k^{(l)} + \ldots - A_p \cdot a_p^{(l)} - A_q \cdot a_q^{(l)} - \ldots = 0.$$

Es müssen $(n - 1)$ Relationen bestehen. Sei nämlich wieder N' die Anzahl der Randpunkte, N'' die Zahl der Innenpunkte bei der Zerlegung des Rechtecks, so ist die Winkelsumme W aller Dreiecke:

$$W = (2 + N' + 2\,N'')\,\pi = n\,\pi.$$

Seien ferner e_0 und e_1 die Zahlen der Rechteckecken, f_0, f_1, f_2 die Zahlen der Randpunkte, g_0, g_1, g_2, g_3, g_4 die Zahlen der Innenpunkte, bei denen soviel Rechte in Winkel α und $\frac{\pi}{2} - \alpha$ zerlegt sind, wie der Index angibt, dann ist:

$$\begin{aligned} 4 &= e_0 + e_1 \\ N' &= f_0 + f_1 + f_2 \\ N'' &= g_0 + g_1 + g_2 + g_3 + g_4. \end{aligned}$$

Für die Anzahl σ der Relationen, welche von Strecken geliefert werden, auf denen kein Innenpunkt mehr liegt, finden wir:

$$2\,\sigma = e_1 + f_0 + 2\,f_1 + 3\,f_2 + 4\,g_0 + 5\,g_1 + \ldots + 8\,g_4.$$

Bilden wir nun für jede Ecke in der Zerlegung des Rechtecks die Summe W_E der Winkelsummen aller Dreiecke, die hier eine Ecke haben; summieren wir ferner die W_E für alle Ecken, so ist:

$$\Sigma\, W_E = 3\,n\,\pi = \{e_0 + 2\,e_1 + 2\,f_0 + 3\,f_1 + 4\,f_2 + 4\,g_0 + \ldots 8\,g_4\} \cdot \pi$$

oder, wenn wir σ einführen:

$$\begin{aligned} 3\,n\,\pi &= \{2\,\sigma + 4 + N'\}\,\pi = \{2\,\sigma + 2 + n - 2\,N''\}\,\pi \\ \sigma &= (n - 1) + N''. \end{aligned}$$

Die linearen Gleichungen an einem Innenpunkte sind nicht unabhängig, vielmehr ist gerade eine überflüssig; also bleiben $\sigma - N'' = n - 1$ unabhängige Relationen übrig.

Schreiben wir wieder die Koëffizienten der A_i in eine Matrix von $(n-1)$ Zeilen und n Kolonnen, so gibt Streichung der i-Kolonne eine Determinante, welche mit $(-1)^i$ multipliziert gleich A_i gesetzt werden kann. Für dieses A_i müssen wir im folgenden nachweisen, dass es eine gerade oder ungerade Funktion von cos α wie sin α ist. Wir beweisen also:

Satz 6. A_i ist eine homogene lineare Funktion der a_k und in den $a^{(l)}$ isobar für jedes l.

Da die a_k nur mit A_k multipliziert auftreten, stehen sie nur in der k-Kolonne der Matrix. Ausser der Null stehen hier aber nur diese Grössen, da A_k in keiner anderen Verfindung als einem Produkt $A_k \cdot a_k$ in den Relationen auftritt. Sobald $k = i$ ist, muss A_i also in den a_k homogen und linear sein. Zugleich enthält eine Zeile der Matrix nur Grössen $a^{(l)}$ ausser der Null, da nur Strecken gleicher Richtung in derselben Relation auftreten. Weil jeder Summand der Determinante für A_i aus jeder Zeile ein Element als Faktor enthält, ist die Anzahl der $a^{(l)}$ in den verschiedenen Summanden stets dieselbe. Also ist A_i auch in der angegebenen Weise isobar. Alle Teile von Satz 6. sind damit erwiesen. Wir können ferner beweisen:

Satz 7. Jedes A_i enthält nur gerade oder ungerade Potenzen von cos α wie sin α.

Zum Beweise betrachten wir zwei beliebige Summanden S_1 und S_2 der Determinante für A_i, die also in den $a^{(l)}$ isobar ist. Eine Reihe von Faktoren $a_k^{(l)}$ sind in S_1 und S_2 als gemeinsamer Faktor P enthalten. Dann sind $\frac{S_1}{P} = T_1$ und $\frac{S_2}{P} = T_2$ auch in den $a^{(l)}$ isobar. T_1 und T_2 enthalten nur noch verschiedene Elemente. Greifen wir aus T_1 ein Element $a_i^{(p)}$ heraus. Da T_1 und T_2 in $a^{(p)}$ isobar sind, enthält T_2 auch wenigstens ein Element $a_u^{(p)}$, das im übrigen beliebig

ausgewählt werden kann. Nun sind T_1 und T_2 in den a_i linear und enthalten $a_i^{(p)}$ nicht als gemeinsamen Faktor; also gibt es in T_2 wenigstens ein Element $a_i^{(q)}$, während in der Richtung $a^{(q)}$ kein $a_n^{(q)}$ in T_1 vorhanden zu sein braucht. Aber da T_1 und T_2 in $a^{(q)}$ isobar sind, enthält T_1 sicher ein Element $a_k^{(q)}$. Wie wir von $a_i^{(p)}$ und $a_n^{(p)}$ zu $a_k^{(q)}$ und $a_i^{(q)}$ übergegangen sind, können wir weiter zu Elementen $a_l^{(r)}$ und $a_k^{(r)}$ gelangen u. s. w. Man wird schliesslich Elemente $a_m^{(s)}$ in T_1 und $a_o^{(s)}$ in T_2 hergeleitet haben, sodass alle bisher aus T_1 und T_2 abgesonderten Elemente verschieden sind. Nun sind T_1 und T_2 in a_m linear und enthalten $a_m^{(s)}$ nicht als gemeinsamen Faktor; also gibt es in T_2 wenigstens ein Element $a_m^{(t)}$. Da dieser Prozess bei der endlichen Anzahl von Faktoren in T_1 und T_2 nicht unbegrenzt fortgehen kann, muss für ein erstes t zu $a_m^{(t)}$ in T_2 ein $a_n^{(t)}$ in T_1 existieren, welches demselben Dreieck D_n angehört, wie $a_n^{(p)}$. Damit ist der Zyklus unseres Verfahrens geschlossen, und wir haben aus T_1 und T_2 Teilprodukte P_1 und P_2 abgesondert:

$$P_1 = a_i^{(p)} \cdot a_k^{(q)} \cdot \ldots \cdot a_n^{(t)}$$
$$P_2 = a_n^{(p)} \cdot a_l^{(q)} \cdot \ldots \cdot a_m^{(t)}.$$

Diese Teilprodukte wollen wir weiter untersuchen und zeigen, dass sie sich nur um gerade Potenzen von $\cos \alpha$ und $\sin \alpha$ unterscheiden können.

Betrachten wir nun beliebige Produkte Q_1 und Q_2:

$$Q_1 = a_1^{(l)} \cdot a_2^{(m)} \cdot \ldots \cdot a_s^{(n)}$$
$$Q_2 = a_1^{(\lambda)} \cdot a_2^{(\mu)} \cdot \ldots \cdot a_s^{(\nu)}.$$

Wir bezeichnen den absoluten Wert des $\sphericalangle\ (a_\varrho^{(p)}, a_\varrho^{(\pi)})$ mit φ_ϱ. φ_ϱ kann die Werte $\frac{\pi}{2}$, α und $\frac{\pi}{2} - \alpha = \beta$ annehmen. In jedem der drei Fälle werden Q_1 und Q_2 sich bei $s = 1$ um eine ungerade Potenz von $\cos \alpha$ oder $\sin \alpha$ oder beiden unterscheiden. Sind aber φ_1 und φ_2 gleich, so differieren Q_1 und Q_2 bei $s = 2$ höchstens um eine gerade Anzahl von Potenzen. Sind φ_1 und φ_2 bei $s = 2$ verschieden,

so ist der Unterschied auch mindestens eine ungerade Potenz. Schliesslich seien bei $s = 3$ alle φ verschieden: dann unterscheiden sich Q_1 und Q_2 wieder höchstens um gerade Potenzen von $\cos\alpha$ wie $\sin\alpha$. Von diesen Tatsachen überzeugt man sich leicht.

Sei nun bei beliebigem s die Summe Φ der nicht absolut genommenen Winkel:

$$\Phi = \measuredangle\,(a_1^{(l)},\ a_1^{(\lambda)}) + \measuredangle\,(a_2^{(m)},\ a_2^{(\mu)}) + \ldots + \measuredangle\,(a_s^{(n)},\ a_s^{(\nu)})$$

ein ganzes Vielfaches h von π; seien p_1, p_2 und p_3 die Anzahlen der Winkel $+\frac{\pi}{2}$, $+\alpha$, $+\beta$; p'_1, p'_2, p'_3 die Anzahlen der Winkel $-\frac{\pi}{2}$, $-\alpha$, $-\beta$. Dann ist:

$$p_1 \cdot \frac{\pi}{2} + p_2 \cdot \alpha + p_3 \cdot \beta = h\pi + p'_1 \frac{\pi}{2} + p'_2 \cdot \alpha + p'_3 \cdot \beta$$

oder: $$\{p_1 - p'_1\}\frac{\pi}{2} + \{p_2 - p'_2\}\alpha + \{p_3 - p'_3\} \cdot \beta = h\pi$$

oder: $$\{p_1 - p'_1 + p_2 - p'_2\} \cdot \frac{\pi}{2} + \{p_3 - p'_3 - p_2 + p'_2\} \cdot \alpha = h\pi.$$

Da α willkürlich ist, folgt:

$$p_2 - p'_2 = p_3 - p'_3$$
$$p_1 - p'_1 + p_2 - p'_2 = 2\,h.$$

Die letzten beiden Gleichungen sind mit folgenden Kongruenzen identisch:

$$p_2 + p'_2 \equiv p_3 + p'_3 \pmod 2$$
$$p_1 + p'_1 + p_2 + p'_2 \equiv 0 \pmod 2.$$

Durch wiederholte Anwendung unserer Resultate über die Potenzen von $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ in Q_1 und Q_2 bei $s = 1, 2, 3$ können wir folgern, dass bei beliebigem s die Winkel α und β gerade so wirken, wie $(p_2 + p'_2)$ Winkel $(\alpha + \beta)$, die wir direkt durch Winkel $\frac{\pi}{2}$ ersetzen dürfen. Dann ist im ganzen die Wirkung von $p_1 + p'_1 + p_2 + p'_2$ Rechten zu studieren,

und da dies eine gerade Zahl ist, unterscheiden sich Q_1 und Q_2 höchstens um gerade Potenzen von cos α und sin α.

Dies Resultat wollen wir auf die Produkte P_1 und P_2 anwenden. Ordnen wir in ihnen die Faktoren $a_k^{(l)}$ nach den verschiedenen k, wie in den Q und bilden Φ:

$$\Phi = \measuredangle\,(a^{(p)},\ a^{(q)}) + \measuredangle\,(a^{(q)},\ a^{(r)}) + \ldots + \measuredangle\,(a^{(t)},\ a^{(p)})$$
$$= \measuredangle\,(a^{(p)},\ a^{(p)}) = h\pi.$$

Es ist h sicher eine ganze Zahl. Folglich unterscheiden sich P_1 und P_2 höchstens um eine gerade Anzahl von Potenzen von cos α wie sin α.

Man erkennt leicht, dass sich T_1 und T_2 in eine endliche Anzahl Paare von Produkten P_1 und P_2 zerlegen lassen. Da für jedes Paar der Satz vom Unterschiede um gerade Potenzen gilt, besteht er auch für das Paar ihrer Produkte, d. h. für T_1 und T_2 sowie weiterhin für S_1 und S_2. Nun sind S_1 und S_2 zwei beliebige Glieder aus A_i, also gilt der Satz auch für A_i im ganzen, wie Satz 7) behauptet.

Wir berechnen ferner die Seiten S_a und S_b. Sie werden in derselben Weise als Längen der von einer Rechteckseite ausgehenden Seiten dargestellt, wie die Strecken, welche zur Bildung der linearen Relationen Anlass gaben. Es gelten genau dieselben Schlüsse, wenn hier beim Rechteck eine Ecke vorhanden ist, an der ein Dreieck einen Rechten hat. Diesen Fall können wir also als erledigt ansehen und behandeln nur noch die zweite Möglichkeit, dass an sämtlichen Ecken des Rechtecks zwei Dreiecke liegen, z. B. D_1 und D_2 an derselben Ecke. Hier stellen wir nicht nur S_a und S_b, sondern auch die Strecke S_{ab} zwischen beiden Dreiecken als Determinante dar auf Grund der Relationen:

$$S_a = A_1 \cdot a_1^{(1)} + \ldots$$
$$S_{ab} = A_1 \cdot a_1^{(2)} + \ldots$$
$$S_{ab} = A_2 \cdot a_2^{(2)} + \ldots$$
$$S_b = A_2 \cdot a_2^{(3)} + \ldots$$

Hier können wir A_1 und A_2 eliminieren, wobei nur Relationen zwischen geraden oder ungeraden Potenzen von sin α wie cos α auftreten:

$$S_a \cdot a_1^{(2)} = S_{ab} \cdot a_1^{(1)} + \ldots$$
$$S_b \cdot a_2^{(2)} = S_{ab} \cdot a_2^{(3)} + \ldots$$

Oder indem wir ebenso S_{ab} eliminieren:

$$S_a \cdot a_1^{(2)} \cdot a_2^{(3)} = S_b \cdot a_1^{(1)} \cdot a_2^{(3)} + \ldots$$

Die Summanden rechts wie links enthalten nur gerade oder ungerade Potenzen von $\cos \alpha$ wie $\sin \alpha$; da aber für $Q_1 = a_1^{(2)} \cdot a_2^{(3)}$ und $Q_2 = a_1^{(1)} \cdot a_2^{(2)}$ die Winkel φ_1 und φ_2 verschieden sind $\left(\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}\right)$, muss der Satz bestehen:

Satz 8. Unter den Funktionen S_a und S_b enthält die eine die geraden, die andere die ungeraden Potenzen von $\cos \alpha$ wie $\sin \alpha$.

Damit ist aber auch hier die aus Satz 5. gezogene Folgerung möglich, und es folgt allgemein:

Satz 9. Aus veränderlichen ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken vom Kathetenverhältnis $\sin \alpha : \cos \alpha$ lässt sich kein Rechteck von konstantem Seitenverhältnis aufbauen.

Der gewünschte Unmöglichkeitsbeweis ist daher in aller Allgemeinheit gelungen.

II. Aufbau konvexer m-Ecke aus konvexen l-Ecken.

§ 8. Allgemeine Überlegungen zum Problem.

Die Untersuchungen der §§ 8—11 beschäftigen sich mit einem anscheinend bisher nur wenig untersuchten Problem bei Zerlegung von Polygonen in Polygone. Seine Formulierung könnte in einem einfachen Falle etwa heissen:

„Aus wieviel Polygonen bestimmter Beschaffenheit lässt sich ein Polygon aufbauen, wenn den Polygonen der Zerlegung die Eigenschaften ihrer Analysis situs vorgeschrieben sind?“

Im folgenden haben wir für das aufgebaute wie für die aufbauenden Polygone zur Definition der Analysis situs-Eigenschaft die Forderung gestellt, dass sie konvex und von der ersten Art sind. Wir operieren stets mit einfachen Polygonen in einer einfach überdeckten Ebene, deren Punkte entweder auf dem Umfange oder im Innern oder Äussern jedes Polygons liegen; da das Polygon konvex ist, lassen sich zwei Punkte seines Umfanges durch eine Strecke verbinden, deren innere Punkte entweder Punkte einer Polygonseite oder Punkte im Innern des Polygons sind. Da wir schon in der Einleitung Gang und Resultate der Untersuchung genauer besprochen haben, können wir jetzt diese selbst beginnen.

Wir behandeln zunächst den Aufbau konvexer m-Ecke aus n konvexen l-Ecken allgemein. Es möge für l, m und (n+1) jede ganze Zahl ≥ 3 erlaubt sein. Dann kommt es auf die Punkte an, in denen Ecken von l-Ecken liegen.

Diese Punkte sind entweder Ecken des m-Ecks oder Punkte auf seinen Seiten oder Punkte in seinem Innern. Der zweite Fall liefert nach der Definition der Randpunkte (§ 4) nur Randpunkte. Im dritten Falle erhalten wir Randpunkte und Innenpunkte; die in § 4 angestellte Überlegung zeigt, dass bei unseren Voraussetzungen über die Ebene alle Fälle erledigt sind. Bezeichnen wir nun mit N′ die Zahl der Randpunkte, mit N″ die Zahl der Innenpunkte bei einer Zerlegung des m-Ecks in n l-Ecke, so hat man für die Summe der Winkel in allen l-Ecken $n \cdot (l-2)\,\pi$. Dieselbe Grösse erhält mittels der Summierung der Winkel an allen Ecken den Wert $(m-2)\,\pi + N'\,\pi + 2\,N''\,\pi$. Durch Gleichsetzung folgt:

1) $$n\,(l-2) = m - 2 + N' + 2\,N''.$$

Ferner benutzen wir konvexe m- und l-Ecke. An einer Ecke des m-Ecks braucht nur ein konvexes l-Eck zu liegen. An einem Randpunkte liegen mindestens zwei, an einem Innenpunkte mindestens drei verschiedene l-Ecke. Aus den Zahlen m, N′, N″ ergibt sich also eine Mindestzahl von Ecken, die an l-Ecken auftreten müssen; diese Mindestzahl darf die wirkliche Zahl $n \cdot l$ nicht überschreiten. Also erhalten wir die Relation:

2) $$n \cdot l \geqq m + 2\,N' + 3\,N''.$$

Hierzu treten noch Positivitäts- und Ganzzahligkeitsrelationen:

3) $$m,\ l \geqq 3; \quad n \geqq 2; \quad N',\ N'' > 0.$$

Aus den Relationen 1) und 2) wollen wir noch eine Ungleichung herleiten, indem wir N″ eliminieren; so folgt:

$$n\,(6-l) \geqq 6 - m + N' \geqq 6 - m.$$

Also: 4) $$m - 6 \geqq n\,(l-6).$$

Nach 1) können wir für n einen Minimalwert herleiten, indem wir N′ und N″ als 0 annehmen:

5) $$n \geqq \frac{m-2}{l-2}.$$

Nehmen wir $l \geqq 6$ an, so können wir diesen Wert in 4) eintragen und erhalten:

$$m \geqq l \geqq 6.$$

Aus Gleichung 4) ergibt sich ferner eine obere Grenze für n, wenn $l > 6$ ist:

6) $$n \leqq \frac{m-6}{l-6}.$$

Aus l-Ecken, $l \geqq 6$ lässt sich nach 4) kein m-Eck aufbauen, wenn m die Werte 3, 4, 5 hat.

§ 9. Die Fälle $l = 3, 4, 5$ ausschliesslich einiger Spezialfälle.

Diskutieren wir nach diesen allgemeinen Betrachtungen nunmehr die Fälle $l = 3, 4, 5$, da die Relationen 1) bis 6) für $l < 6$ nur einfache Resultate vermitteln, für $l \geqq 6$ dagegen nicht genügend genau orientieren. Für $l = 3$ ist die Minimalzahl der zum Aufbau eines m-Ecks nötigen Vielecke nach Rel. 5) $m - 2$. Ein Maximum von n ist nicht vorhanden, denn zieht man von einer Dreiecksecke nach einem Punkte der gegenüberliegenden Seite eine Verbindungslinie, so zerfällt das Dreieck in zwei Dreiecke. Daraus folgt, dass die Zerlegung eines m-Ecks in $(n + 1)$ Dreiecke möglich ist, wenn die in n Dreiecke existiert.

Für den Aufbau aus konvexen Vierecken gelten ähnliche Überlegungen. Durch Verbindung von Punkten zweier gegenüberliegender Seiten wird ein Viereck in zwei Vierecke zerlegt; also ist der Aufbau aus $(n + 1)$ Vierecken möglich, wenn aus n Vierecken. Sind $E_1, E_2, \ldots E_m$ die Ecken des m-Ecks in der Ordnung, wie sie beim Umlauf des Umfanges in bestimmter Richtung durchlaufen werden, so verbinde man E_m mit $E_3, E_5, \ldots$ Ist m gerade, so ist E_m, E_{m-3} die letzte nötige Verbindungslinie. Ist aber m ungerade, so verbinde man nur noch $E_m E_{m-4}$. Das dann übrig bleibende Fünfeck wird so in zwei Vierecke zerlegt, dass E_m mit einem Punkte der Seite $E_{m-2} E_{m-1}$ verbunden wird. Augenscheinlich

hinterbleibt hier noch der Fall des Dreiecks. Aus zwei Vierecken kann es nicht aufgebaut werden; denn diese können nur eine Seite gemeinsam haben, und so findet man ein Vier-, Fünf- oder Sechseck. Schon aus drei Vierecken gelingt aber der Aufbau; es ist nur nötig, einen Punkt im Innern in passender Weise mit jeder der drei Seiten zu verbinden (Fig. 11).

Ebenso können wir $l = 5$ behandeln. Man verbindet die Ecke E_m mit E_4, E_7, ... Hier hinterbleiben dann für eine spezielle Untersuchung die Fälle $m = 3, 4, 6, 7$; dazu fügen wir $m = 1$, weil das Fünfeck sich nicht aus zwei konvexen Fünfecken aufbauen lässt; dies erkennt man leicht, da sich aus zwei konvexen Fünfecken mit gemeinsamer Seite ein Sechs-, Sieben- oder Achteck aufbauen lässt. Damit sind aber die einfachsten Fälle für $m = 6$ und 7 bereits gefunden. Wir wollen nun zeigen, dass sich ein m-Eck, wenn aus n, auch aus $(n + 1)$ Fünfecken aufbauen lässt. Der Beweis kann durch Schluss von n auf $(n + 1)$ geführt werden, ausgehend von den einfachsten Zerlegungen, ausser für $m = 8$, wo die Zerlegung in drei Fünfecke der Ausgangspunkt sein wird. Der Beweis gilt auch für die später angegebenen, wahrscheinlich einfachsten Zerlegungen der Drei-, Vier- und Fünfecke in Fünfecke.

Die Zerlegung des Achtecks in drei Fünfecke geschehe folgendermassen. Die Ecken seien in ihrer Reihenfolge auf dem Umfange E_1, E_2, ... E_8. Man wähle (Fig. 12) auf $E_3 E_4$ einen Punkt P und zeichne das Dreieck $E_1 P E_6$. In ihm liege beliebig ein Punkt Q, der mit E_1, P und E_6 verbunden werden möge. Dann ist das Achteck in folgende drei konvexe Fünfecke zerlegt:

1) $Q\ E_1\ E_2\ E_3\ P$

2) $Q\ P\ E_4\ E_5\ E_6$

3) $Q\ E_6\ E_7\ E_8\ E_1$.

Nun können wir beweisen, dass ein m-Eck sich, wenn aus n, dann auch aus $(n + 1)$ Fünfecken aufbauen lässt.

Denn in jeder unserer Ausgangszerlegungen kommen zwei Fünfecke vor, die eine Seite, sowie die Richtung der in einem ihrer Endpunkte ansitzenden Seiten gemein haben, wie dies beim Achteck die Seite P Q und die Richtung $E_3 E_4$ ist. Seien allgemein $P Q A_1 A_2 A_3$ und $Q P A_4 A_5 A_6$ (Fig. 13) diese Fünfecke. Wir verbinden $P A_2$ und $Q A_3$, was den Schnittpunkt B_1 liefert; verbinden ferner $P A_5$ und $Q A_4$, was B_2 liefert. Eine Gerade durch B_1 und B_2 schneidet P Q in C, $A_2 A_3$ in C_1, $A_4 A_5$ in C_2. Im Innern des Dreiecks $Q C_1 C_2$ wählen wir einen Punkt D, den wir mit Q, C_1 und C_2 verbinden. Dann sind die gegebenen Fünfecke in folgende drei konvexe Fünfecke zerlegt:

1) $D Q A_1 A_2 C_1$; 2) $D C_1 A_3 A_4 C_2$; 3) $D C_2 A_5 A_6 Q$.

Damit ist unsere Aufgabe gelöst und zwar lässt die Lösung den Schluss von n auf $n + 1$ zu, da die Fünfecke 1) und 2) wie die beiden Ausgangs-Fünfecke eine Seite sowie die Richtung der in einem ihrer Endpunkte ansitzenden Seiten gemeinsam haben.

Die bei dieser Konstruktion gebrauchte Tatsache, dass C zwischen P und Q, C_1 zwischen A_2 und A_3, C_2 zwischen A_4 und A_5 liegt, lässt sich daraus einsehen, dass $A_2 A_3 P Q$, $A_4 A_5 Q P$ und $B_1 P B_2 Q$ konvexe Vierecke mit den Diagonalenschnittpunkten C_1, C_2, C sind; daraus folgt die Behauptung leicht.

Es verdient bemerkt zu werden, dass die für $l = 3, 4, 5$ angegebenen Zerlegungen von m-Ecken in n l-Ecke nur dazu nötig sind, die Möglichkeit wenigstens einer Zerlegung zu zeigen. In Wirklichkeit existieren im allgemeinen noch viel mehr Zerlegungen, wenn diese auch stets in eine endliche Zahl von Gruppen mit verschiedener Analysis situs zerfallen.

§ 10. Aufbau von Drei-, Vier- und Fünfeck aus der kleinsten Zahl von Fünfecken.

Jetzt ist noch die Aufgabe geblieben, die einfachsten Zerlegungen von Drei-, Vier- und Fünfecken in konvexe

Fünfecke zu suchen. Dies sind vermutlich die in den Figuren 14, 15, 16 gegebenen Zerlegungen. Da aber über die Analysis situs der einfachsten Zerlegungen nichts weiter ausgesagt werden kann, vermag im folgenden nur der Satz bewiesen zu werden:

Satz 1. Liegt bei dem Aufbau eines m-Ecks ($m = 3, 4, 5$) aus konvexen Fünfecken wenigstens ein Fünfeck im Innern des m-Ecks, so sind die Minimalzahlen der zu verwendenden Fünfecke bez. 9, 8 und 6.

Zum Beweise ermitteln wir zunächst einige Möglichkeiten der Anlagerung konvexer Polygone P an ein einfach zusammenhängendes aus Polygonen aufgebautes Gebiet A. Ein anzulagerndes Polygon kann zweierlei Elemente mit A gemeinsam haben, 1. einzelne Punkte, 2. zusammenhängende Streckenzüge. Ist A ein konvexes Polygon, so kann P mit A nur einen einzelnen Punkt oder eine Strecke gemein haben, wenn P ganz ausserhalb von A liegt, wie wir stets annehmen. Diese verschiedenen Anlagerungsmöglichkeiten sind in Fig. 17, 1—12 dargestellt, indem an a aus A das Polygon b angelagert wird. Ist A ein konkaves Polygon, so gibt es noch andere Anlagerungsmöglichkeiten. Davon haben wir diejenigen herausgesucht, in denen P nur einen Streckenzug von zwei Strecken mit A gemeinsam hat, die in einer konkaven Ecke von A zusammenstossen. Diese Möglichkeiten sind in den Figuren 17, 13—21 angegeben, indem wieder die a zu A gehören, und b ein P ist. Bei den folgenden Untersuchungen wird man sich in jedem Falle leicht überzeugen, dass keine anderen Anlagerungsmöglichkeiten in Frage kommen. Wenn A bereits in Polygone $a_1, a_2, \ldots$ zerlegt ist, so ist bei Anlagerung eines beliebigen Polygones P stets nur der Umfang von A zur Unterscheidung der Anlagerungsmöglichkeiten massgebend; auf Beziehungen von P zu einigen der a_i wird gar keine Rücksicht genommen.

Wir nehmen nun an, dass ein einfaches Polygon von k Seiten in der einfach überdeckten Ebene vorläge. Dann definieren wir:

Definition. Unter einem Ringe von konvexen Fünfecken, der um ein einfaches k-Eck A gelegt ist, verstehen wir eine Gesamtheit von Fünfecken b_i ausserhalb des k-Ecks, deren jedes mit dem Umfange des k-Ecks wenigstens einen Punkt gemeinsam hat, deren keines ein anderes auch nur teilweise überdeckt, während jeder Punkt vom Umfange des k-Ecks aussen nur an Punkte des Umfanges von Fünfecken b_i grenzt.

Zu diesem Ringbegriffe gibt Fig. 18 ein Beispiel. An ein konkaves Sechseck A sind sieben Fünfecke $b_1, \ldots b_7$ angelagert. Dabei sind verschiedene Anlagerungsmöglichkeiten verwendet worden. So ist b_1 nach Fig. 17, 10; b_2 nach 17, 3; b_3 und b_4 nach 17, 7; b_5 nach 17, 6; b_6 nach 17, 4 und b_7 nach 17, 13 angelagert. Würden wir eins der Polygone b entfernen, so würden die übrig bleibenden Fünfecke keinen Ring mehr bilden; wäre z. B. b_6 nicht vorhanden, so grenzte ja A zwischen b_5 und b_7 an Gebiet, das nicht zu Polygonen b gehört.

Damit wir einen Ring um A einigermassen beschreiben können, stellen wir fest, wie oft die Anlagerungsmöglichkeit Fig. 17, i auftritt und bezeichnen diese ganze Zahl ≥ 0 mit s_i. So hat man in Fig. 18: $s_7 = 2$, $s_3 = s_4 = s_6 = s_{10} = s_{13} = 1$, die übrigen s_i sind $= 0$. Aus den Werten der s_i ist bei gegebenem A im allgemeinen die Anlagerung ihrer Analysis situs nach nicht eindeutig bestimmt; so könnte b_6 in Fig. 18 zwischen je zwei benachbarten Fünfecken ausser zwischen b_1 und b_2 liegen, während b_7 an keiner anderen Stelle liegen kann.

Zwei benachbarte Fünfecke b′ und b″ eines Ringes können auf wesentlich vier verschiedene Weisen einander angrenzen, die in Fig. 19 dargestellt sind. So grenzen in Fig. 18 b_1 und b_2 sowie b_6 und b_7 nach Fig. 19, 1; ferner b_2 und b_3 nach 19, 2; ferner b_1 und b_2, b_4 und b_5, b_5 und b_6 nach 19, 3; schliesslich b_3 und b_4 nach 19, 4 einander an. Die Möglichkeit Fig. 19, i sei bei einem Ringe von Fünfecken um ein k-Eck r_i-mal verwendet. Bei Fig. 18 ist

$r_1 = 2$, $r_2 = 1$, $r_3 = 3$, $r_4 = 1$. Auch durch die Werte r_i eines Ringes ist die Anlagerung benachbarter Polygone ihrer Analysis situs nach im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

Nunmehr denken wir uns an ein konvexes Fünfeck einen Ring von konvexen Fünfecken gelegt. Dabei entsteht ein einfaches K-Eck, dessen Seitenzahl K wir berechnen. Wir verwandeln das K-Eck vorübergehend in ein $\overline{K}$-Eck, bei dem ausser r_3 alle $r_i = 0$ sind, während wir die s_i nicht ändern. Von den s_i können nur $s_1, s_2, \ldots s_{12} \neq 0$ sein, da der Ring um ein konvexes Fünfeck gelegt ist. So erhalten wir durch Abzählung für $\overline{K}$:

$$\overline{K} = 4s_1 + 3s_2 + 3s_3 + 3s_4 + 4s_5 + 3s_6 + 2s_7 + 2s_8 + 3s_9 + 2s_{10} + 2s_{11} + 3s_{12}$$
$$= 4(s_1 + s_5) + 3(s_2 + s_3 + s_4 + s_6 + s_9 + s_{12}) + 2(s_7 + s_8 + s_{10} + s_{11}).$$

Setzen wir:

$$7) \qquad \begin{cases} t_1 = s_1 + s_5 \\ t_2 = s_2 + s_3 + s_4 + s_6 + s_9 + s_{12} \\ t_3 = s_7 + s_8 + s_{10} + s_{11}, \end{cases}$$

so folgt:

$$\overline{K} = 4\,t_1 + 3\,t_2 + 2\,t_3.$$

Verwandeln wir nun das $\overline{K}$-Eck in das K-Eck zurück, wobei sich die s_i nicht ändern, sondern nur die r_i, so findet man für K:

$$8) \qquad K = 4\,t_1 + 3\,t_2 + 2\,t_3 + r_1 - r_2.$$

Wir können über die r_i und s_i noch einiges aussagen. Zunächst müssen an jedem linken Endpunkt der fünf Seiten des inneren Fünfecks Fünfecke des Ringes angrenzen, die mit dem inneren Fünfeck eine Strecke einer Seite gemein haben. Damit erhalten wir für die zugehörigen s_i die Relation:

$$9) \qquad s_1 + s_2 + s_3 + s_6 + s_7 + s_8 = 5.$$

Entsprechend erhält man wegen der rechten Endpunkte:

$$10) \qquad s_1 + s_2 + s_6 + s_7 + s_9 + s_{10} = 5.$$

Ausserdem sind die t_i mit den r_i durch die Relation verbunden:

$$11) \qquad t_1 + t_2 + t_3 = r_1 + r_2 + r_3 + r_4.$$

Mit diesen Relationen 7)—11) leiten wir für K ein Minimum ab, indem wir noch berücksichtigen, dass die s_i und r_i ganze Zahlen ≥ 0 sein müssen. Mittels 11) eliminieren wir r_2 aus K:

$$K = 3\,t_1 + 2\,t_2 + t_3 + 2\,r_1 + r_3 + r_4.$$

Nach 9) und 10) schliessen wir:

$$5 \leq t_1 + t_2 + t_3.$$

Wir subtrahieren dies von der Gleichung für K:

$$K \geq 5 + 2\,t_1 + t_2 + 2\,r_1 + r_3 + r_4 \geq 5$$
$$K \geq 5.$$

Also liefert einzig der Fall $K = 5$ etwas Neues. Da $K > 5$ ausgeschlossen ist, schliessen wir mittels der ausführlichen Relation für K:

$$t_1 = t_2 = 0,\ t_3 = 5;\ r_1 = r_3 = r_4 = 0,\ r_2 = 5.$$

Nach den Gleichungen 7), 9), 10) ist also:

$$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = s_6 = s_9 = s_{12} = 0$$
$$s_7 + s_8 = s_8 + s_{10} = 5$$
$$s_7 = 5 - \frac{s_8 + s_{10}}{2}.$$

Setzen wir dies in $t_3 = 5$ ein, so folgt:

$$5 + \frac{s_8 + s_{10}}{2} + s_{11} = 5$$
$$s_7 = 5,\ s_8 = s_{10} = s_{11} = 0.$$

Durch $s_7 = r_2 = 5$ ist aber die Zerlegung der Fig. 16 eindeutig definiert.

Wie unser Satz behauptet, wird hier das Fünfeck aus sechs konvexen Fünfecken aufgebaut. Beim Drei- und Viereck brauchen wir zum Aufbau wenigstens sieben Fünfecke, da wir sie ja mittels eines Ringes nicht aufbauen können. Um für sie die gesuchte Zerlegung in Fünfecke zu erhalten, fügen wir zu den Fünfecken des ersten Ringes noch solche, welche einem Ringe um diesen angehören können. Dass kein geschlossener zweiter Ring brauchbar ist, folgt daraus, dass zum zweiten Ringe mindestens fünf Fünfecke gehören

würden, aber nach Fig. 14 und 15 höchstens zwei und drei Fünfecke zugefügt werden dürfen. Da zum Aufbau des Vierecks höchstens zwei weitere Fünfecke angelagert werden, kommen keine komplizierteren als die bisher angeführten Anlagerungsmöglichkeiten in Frage. Für das Dreieck gilt dasselbe. Denn ein anzulagerndes Fünfeck hat höchstens mit zwei angrenzenden Fünfecken des ersten Ringes Punkte gemein. Ein Fünfeck des ersten Ringes trägt aber nie nur eine Strecke zu den Seiten des K-Ecks bei, sodass nie an einer K-Eckseite zwei konkave Ecken liegen können. Also müsste ein anzulagerndes Fünfeck A zwischen sich und dem ersten Ringe ein durch Fünfecke auszufüllendes Gebiet G abgrenzen, indem es mit zwei nicht angrenzenden Seiten des K-Ecks Punkte gemein hätte. Zur Ausfüllung von G dürfen höchstens zwei konvexe Fünfecke benutzt werden. Dann hätte G nie zwei aufeinanderfolgende konkave Ecken, weshalb A höchstens mit zwei Seiten an G stossen kann. G hat zwei Gruppen von drei, oder eine Gruppe von fünf aufeinanderfolgenden konvexen Ecken; da aber das K-Eck nie zwei aufeinanderfolgende konkave Ecken hat, so ist ein Gebiet G unmöglich vorhanden.

Sollten die beim Dreieck anzulagernden Fünfecke ferner ausserhalb des K-Ecks in besonderer Weise aneinandergrenzen, so könnten sie nur einen Punkt ausserhalb des K-Ecks gemein haben. Aus der Unmöglichkeit des Gebietes G folgt, dass jedes anzufügende Fünfeck nur einen Punkt oder eine oder zwei zusammenhängende Strecken mit dem K-Eck gemein hat. Sollten drei dieser Fünfecke in einem Punkte zusammenstossen, so müssen zwei von ihnen, A und B, das dritte, C, einschliessen mittels Abschlusses durch das K-Eck. Da das K-Eck keine zwei aufeinanderfolgenden konkaven Ecken hat, kann C mit dem K-Eck höchstens zwei Seiten gemein haben. Indem an zwei weitere Seiten von C Seiten von A bez. A und dem K-Eck grenzen, entfernt sich die fünfte Seite des C sowohl von A wie von B, sodass A, B und C in keinem Punkte zusammenstossen. Ähn-

liches tritt ein, wenn C mit dem K-Eck nur eine Seite gemein hat.

Also müssen beim Drei- und Viereck die durch die r_i und s_i beschriebenen Verhältnisse des Angrenzens vorliegen. Aber da der zweite Ring nicht vollständig ist, werden Seiten des K-Ecks bereits mit Strecken vom Umfange des m-Ecks übereinstimmen, und zwar gehört die ganze K-Eckseite einer m-Eckseite an. Derartige Seiten des K-Ecks, u an der Zahl, werden zusammenhängend, also in Streckenzügen vorhanden sein; die Zahl der Streckenzüge sei v, die ihrer Endpunkte also 2v. Ausserdem können w isolierte Ecken des K-Ecks auf dem Umfange des m-Ecks liegen. Von den u Seiten können mehrere auf einer Seite des m-Ecks liegen, etwa $\bar{p}+1$ auf einer. Die Summe der $\bar{p}$ für alle Seiten des m-Ecks sei p. Es ist $p \leqq v$. Die ausgezeichneten $2v+w$ Ecken des K-Ecks werden Randpunkte des m-Ecks sein, bis auf q, welche Ecken daran sind.

Nunmehr sind wir im Stande, die Seitenzahl des mittels der angefügten Fünfecke entstehenden K′-Ecks zu berechnen. Die neuen r_i und s_i mögen durch einen Strich unterschieden werden. Wir setzen:

$$12)\qquad \begin{aligned} t'_1 &= s'_1+s'_5\\ t'_2 &= s'_2+s'_3+s'_4+s'_6+s'_9+s'_{12}+s'_{13}\\ t'_3 &= s'_7+s'_8+s'_{10}+s'_{11}+s'_{14}+s'_{15}+s'_{16}+s'_{19}\\ t'_4 &= s'_{17}+s'_{18}+s'_{20}+s'_{21}. \end{aligned}$$

Dann erhalten wir für K′:

$$13)\qquad K' = 4\,t'_1+3\,t'_2+2\,t'_3+t'_4+r'_1-r'_2+u-p+q.$$

Ausserdem entsprechen den Relationen 9), 10) und 11):

$$14)\qquad \begin{aligned} K = u&+s'_1+s'_2+s'_3+s'_6+s'_7+2s'_{13}+2s'_{14}+2s'_{15}\\ &+2s'_{16}+2s'_{18}+s'_{19}+s'_{20}+s'_{21} \end{aligned}$$

$$15)\qquad \begin{aligned} K = u&+s'_1+s'_2+s'_6+s'_7+s'_9+s'_{10}+2s'_{13}+2s'_{14}\\ &+s'_{15}+2s'_{16}+2s'_{17}+s'_{18}+2s'_{19}+2s'_{20}+s'_{21} \end{aligned}$$

$$16)\qquad r'_1+r'_2+r'_3+r'_4+v+w = t'_1+t'_2+t'_3+t'_4.$$

Ferner stehen die r, welche konkave Ecken des K-Ecks verbürgen, zu einigen s'_i in Beziehung:

17) $$r_1 + r_3 \geqq s'_{13} + s'_{14} + \ldots + s'_{21}.$$

Jetzt können wir unser eigentliches Problem behandeln. Wir wissen, dass beim Dreieck höchstens drei, beim Viereck höchstens zwei Fünfecke zum ersten Ringe hinzuzufügen sind. Für $K' = 3$ und 4 können wir also ansetzen:

$$t'_1 + t'_2 + t'_3 + t'_4 \leqq C - K'$$

und da für $K' = 3$ das $C - K' = 3$ sein soll, ist $C = 6$. Also:

18) $$t'_1 + t'_2 + t'_3 + t'_4 \leqq 6 - K'.$$

Wir subtrahieren 17) von 14) oder 15), und indem wir einige der s'_i durch alle ersetzen, folgt:

$$K - r_1 - r_3 \leqq u + t'_1 + t'_2 + t'_3 + t'_4.$$

Wir addieren hierzu 18) und finden mittels des Wertes für K:

$$4\,t_1 + 3\,t_2 + 2\,t_3 - r_2 - r_3 \leqq u + 6 - K'.$$

Nach 11) ist, sowie nach 9) oder 10):

$$r_2 + r_3 \leqq t_1 + t_2 + t_3$$
$$5 \leqq t_1 + t_2 + t_3.$$

Addieren wir die drei letzten Relationen, so folgt mit Abschätzung der linken Seite:

$$0 \leqq 2\,t_1 + t_2 \leqq u + 1 - K'$$
$$u \geqq K' - 1.$$

Addieren wir dies zu 13), so ergibt sich:

$$1 \geqq 4\,t'_1 + 3\,t'_2 + 2\,t'_3 + t'_4 + r'_1 - r'_2 - p + q.$$

Subtrahieren wir ferner hiervon 16):

19) $$1 \geqq 3t'_1 + 2t'_2 + t'_3 + 2r'_1 + r'_3 + r'_4 + (v - p) + w + q.$$

Wie oben bemerkt, ist $(v - p) \geqq 0$. Also stehen rechts in 19) nur positive Grössen; da das K'-Eck konvex ist, sind r'_1 und $r'_3 = 0$; ferner rechnen wir nur mit ganzen Zahlen, also folgt:

$$t'_1 = t'_2 = 0.$$

Nun trennen wir die beiden Fälle $v - p \geq 0$. Für $v = p$ sind beide Grössen mit $u \geq K' - 1 > 0$ auch $\neq 0$. Dann muss aber auf jeder m-Eckseite wenigstens eine der u Seiten liegen, woraus mit $p > 0$ folgt:

$$u \geq K' + 1.$$

Hiermit erhalten wir aus 13):

$$r'_2 + v \geq 2\,t'_3 + t'_4 + q + 1.$$

Subtraktion von 16) ergibt bei $p = v$:

$$0 > 1 + t'_3 + r'_4 + q + w \geq 1.$$

Das ist ein Widerspruch, weshalb nur $v > p$ möglich ist. Gl. 19) erlaubt aber nur $v - p = 1$, woraus folgt:

$$0 = t'_3 + r'_4 + q + w.$$

Alle Grössen rechts sind 0 und damit alle s'_i ausser in t'_4. Indem nun in 19) nur das Gleichheitszeichen gilt, trifft dies auch für alle Relationen von 18) an zu. Also ist:

$$r_2 + r_3 = t_1 + t_2 + t_3 = 5 = t_3$$
$$K = 10 + r_1 - (5 - r_3) = 5 + r_1 + r_3.$$

Nach 17) können wir aber jetzt schliessen:

$$r_1 + r_3 \geq t'_4 = 6 - K'$$
$$K \geq 11 - K'$$

20) $$K + K' \geq 11.$$

Mit Hülfe der Relation:

$$u = K' - 1$$

können wir aus 14) und 15) s'_{17} berechnen:

$$s'_{17} = \frac{K - K' + 1}{2} - \frac{3\,(s'_{18} + s'_{20}) + 2\,s'_{21}}{4}.$$

Setzen wir dies in den Wert für $t'_4 = 6 - K'$ ein, so folgt:

$$6 - K' = \frac{K - K' + 1}{2} + \frac{s'_{18} + s'_{20} + 2\,s'_{21}}{4}$$

$$11 = K + K' + \frac{s'_{18} + s'_{20} + 2\,s'_{21}}{2}.$$

Vergleichen wir dies mit 20), so ergibt sich:

$$0 \geq s'_{18} + s'_{20} + 2\,s'_{21}$$
$$s'_{18} = s'_{20} = s'_{21} = 0$$
$$s'_{17} = t'_4 = 6 - K'.$$

Indem nun $s'_{17} = 6 - K'$, $v = 1$, $r'_2 = 5 - K'$ ist, erhalten wir genau die Zerlegungen der Fig. 14 und 15, deren Anzahl von konvexen Fünfecken in unserem Satze als Minimalzahlen angegeben und jetzt als solche erwiesen sind.

Ein etwa zu erhebender Einwurf, dass beim Drei- und Viereck mittels einer Zerlegung von Fünfecken aus einem dritten Ringe ein einfacheres Resultat erhalten werden könnte, ist zurückzuweisen, da u dann einen zu grossen Wert erhalten würde. Auch kann man ein anderes Fünfeck als mittelstes nehmen, sodass nur zwei Ringe auftreten.

Wir bemerken noch, dass die oben benutzten Bedingungen bei den Zerlegungen für das Drei-, Vier- und Fünfeck erfüllt sind für den Schluss, dass das m-Eck sich, wenn aus n Fünfecken, auch aus $(n + 1)$ Fünfecken aufbauen lässt.

§ 11. Satz über den Aufbau aus konvexen l-Ecken, $l \geqq 6$.

Bisher haben wir den Aufbau konvexer m-Ecke aus konvexen l-Ecken für die Fälle $l = 3, 4, 5$ untersucht, wobei sich besonders für $l = 5$ Schwierigkeiten zeigten. Wir hatten die einfachsten Werte m gesondert untersuchen müssen und waren dabei wegen der Anlagerungsmöglichkeiten in Ungewissheit gewesen. Für $l \geqq 6$ kommen wir nun zu dem einfachen Resultate, dass die vier Möglichkeiten r_i und die 21 Möglichkeiten s_i bei Verwendung von Ringsystemen alle möglichen Anlagerungen liefern. Dies wollen wir jetzt beweisen.

Wir denken uns einen einfach zusammenhängenden Bereich der einfach überdeckten Ebene, der in eine endliche Zahl konvexer l-Ecke, $l \geqq 6$, zerlegt ist. Aus den l-Ecken greifen wir eins, R_0, als Zentrum eines Ringsystemes heraus. Zum ersten Ringe R_1 gehören alle l-Ecke ausserhalb R_0, welche mit ihm wenigstens einen Punkt gemein haben. Der Ring R_1 hat ein einfaches Polygon P_1 als äussere Begrenzungskurve, wie gezeigt werden wird. Zum Ringe R_2 gehören

alle l-Ecke ausserhalb P_1, welche mit ihm wenigstens einen Punkt gemein haben; auch R_2 hat ein einfaches Polygon P_2 als äussere Begrenzung. So können wir fortfahren. Der Ring R_ν hat ein einfaches Polygon P_ν als äussere Begrenzung; zum Ringe $R_{\nu+1}$ gehören alle l-Ecke ausserhalb P_ν, welche mit ihm wenigstens einen Punkt gemeinsam haben; dann hat $R_{\nu+1}$ wieder ein einfaches Polygon $P_{\nu+1}$ als äussere Begrenzung.

Da der Bereich mit einer endlichen Zahl von l-Ecken ausgefüllt ist, können von einem bestimmten $\nu \geqq 0$ an die Ringe $R_{\nu+1}$, $R_{\nu+2}$, ... nicht vollständig sein. Doch lassen sich die Teile der Ringe weiter bestimmen, sodass von jedem l-Eck angegeben werden kann, dem wievielten Ringe es angehört. Wir ersetzen dann die Kurven P_ϱ durch Streckenzüge, die abgesehen von ihren Endpunkten ganz im Innern des zerlegten Bereiches liegen und die l-Ecke von R_ϱ von denen des Ringes $R_{\varrho+1}$ trennen.

Ist nun ein einfach zusammenhängendes Gebiet der einfach überdeckten Ebene beliebig in einfache Polygone eingeteilt, so können wir auch hier von einem Polygon R_0 als Zentrum ausgehend ein Ringsystem aufstellen. Hier wird ein vollständiger Ring jedoch nicht notwendig als „äussere Begrenzung“ ein einfaches Polygon haben, sondern beliebig viele Polygone, die auch Doppel- und mehrfache Punkte haben können. Wir wollen nachweisen, dass dies bei einer Zerlegung in l-Ecke, $l \geqq 6$, nicht eintreten kann. Hierfür ist der Nachweis notwendig, dass kein folgendermassen definiertes Gebiet G existiert. Es könnte erstens ein l-Eck A in $R_{\nu+1}$ geben, welches mit P_ν zwei Punkte gemein hat, die nicht durch einen zu A und P_ν gehörigen Streckenzug verbunden werden können. A und die l-Ecke von $R_{\nu+1}$, welche von A und R_ν eingeschlossen werden, grenzen dann das Gebiet G ab, das eine Insel genannt werden möge. Zweitens können aber zwei l-Ecke B und C von $R_{\nu+1}$ existieren, die auf P_ν keinen Punkt gemein haben, wohl aber ausserhalb P_ν einen Punkt

oder eine Strecke. Hier grenzen B und C sowie die l-Ecke von $R_{\nu+1}$, welche von B, C und $R_{\nu+1}$ eingeschlossen werden, das Gebiet G ab; G möge Insel heissen, wenn B und C eine Strecke, Halbinsel, wenn B und C nur einen Punkt gemeinhaben. Keins der von A oder B und C sowie R_ν eingeschlossenen l-Ecke von $R_{\nu+1}$ möge selbst die Eigenschaft eines A, B oder C besitzen.

Um ein Beispiel eines Gebietes G zu erhalten, gehe man von der Zerlegung Fig. 11 aus. Auf jeder der drei vom Punkte im Innern gezogenen Strecken wähle man einen Punkt und verbinde die drei Punkte miteinander. Das von ihnen gebildete Dreieck, welches von drei Fünfecken eingeschlossen wird, zerlege man nach Fig. 14 in Fünfecke. Konstruiert man jetzt um eins der an einer Ecke des inneren Dreiecks liegenden Fünfecke das Ringsystem, soweit möglich, so schliessen die Fünfecke des ersten oder zweiten Ringes bereits eine Insel ein, bestehend aus einem oder sechs Fünfecken.

Wir formulieren nun unseren Satz:

Satz 2. Ein einfach zusammenhängendes, in konvexe l-Ecke ($l \geq 6$) zerlegtes Gebiet der einfach überdeckten Ebene enthält bei einem System von Ringen um ein l-Eck in keinem Ringe Inseln oder Halbinseln.

Zum Beweise nehmen wir zunächst bei einem Ringsysteme $R_0, R_1 \ldots R_\nu, \ldots$ an, dass $R_1, R_2, \ldots R_\nu$ kein Gebiet G einschliessen, wohl aber $R_{\nu+1}$. G kann dann nicht zu einem Polygon ohne Flächeninhalt, also aus lauter Strecken, entarten. Denn ein von A, B und C verschiedenes Polygon D von $R_{\nu+1}$ habe mit G wenigstens $(l-5) \geq 1$ Ecken gemein; seine Anlagerung an P_ν findet nach den hier allein anwendbaren Möglichkeiten r_i und s_i statt. An der konvexen Ecke von D, die auch G angehört, müssen im Fall der Entartung mindestens zwei l-Ecke von $R_{\nu+1}$ anliegen; da hier zwei l-Ecke einen Punkt gemein haben, so müssen dies die l-Ecke B und C sein. Weil B, C, D konvexe Polygone mit

$l \geqq 6$ Seiten sind, haben B, C und P_ν mit D höchstens vier Seiten gemein; also kann man derart bezeichnen, dass B und D auf P_ν keinen Punkt, wohl aber ausserhalb P_ν einen Punkt gemein haben. Mithin hat D die Eigenschaft von C im Widerspruch zur Forderung: keins der von B, C und R_ν eingeschlossenen Polygone von $R_{\nu+1}$ soll selbst die Eigenschaft von B oder C besitzen. Deshalb ist der Flächeninhalt von G stets $\neq 0$. In ähnlicher Weise zeigt man, dass der Umfang von G ein einfaches Polygon, G also ein einfach zusammenhängender Bereich sein muss.

Über G wissen wir sonst nicht viel; es kann wie das ursprüngliche Gebiet ganz beliebig in eine endliche Anzahl von l-Ecken zerlegt sein; aber es enthält weniger l-Ecke, als das ursprüngliche Gebiet. Wir können in G ein l-Eck R'_0 als Zentrum eines Ringsystemes wählen, das im allgemeinen auch wieder Inseln oder Halbinseln enthält. G′ sei eine solche Insel oder Halbinsel, die ebenfalls aus l-Ecken aufgebaut ist. Mit G′ können wir wie mit G verfahren. Wir kommen so zu einer Reihe von l-Eckzerlegungen G, G′, G″, . . ., von denen jede folgende als Teil in allen vorhergehenden enthalten ist; jede folgende besteht auch aus weniger l-Ecken als die vorhergehenden; jede nimmt einen einfach zusammenhängenden Bereich ein. Da die Zahl der l-Ecke als endlich vorausgesetzt ist, müssen wir schliesslich zu einem Gebiete G_λ kommen, das mit seinem Zentrum $R_0^{(\lambda)}$ eines Ringsystemes in keinem Ringe eine Insel oder Halbinsel hat. Wir nehmen der Einfachheit halber an, R_0 sei so gewählt, dass $G = G_\lambda$ wird, was die Allgemeinheit nicht beschränkt.

Wir wollen nun die Lage der konkaven und konvexen Ecken bei G untersuchen, welches ein einfaches Polygon von K Seiten als Begrenzung habe. Die Seitenzahl K_ϱ der äusseren Begrenzung P_ϱ eines Ringes R_ϱ in G ist, nach den Grössen r_i und s_i des Ringes berechnet:

21) $K_\varrho = (l-1)t_1 + (l-2)t_2 + (l-3)t_3 + (l-4)t_4 + r_1 - r_2$

wobei gesetzt ist:

$$
\begin{aligned}
t_1 &= s_1 + s_5 \\
t_2 &= s_2 + s_3 + s_4 + s_6 + s_9 + s_{12} + s_{13} \\
t_3 &= s_7 + s_8 + s_{10} + s_{11} + s_{14} + s_{15} + s_{16} + s_{19} \\
t_4 &= s_{17} + s_{18} + s_{20} + s_{21}
\end{aligned} \qquad 22)
$$

Zwischen zwei konkaven Ecken liegen mindestens $(l-5)$ konvexe Ecken, also sicher eine. Wenn nun an die vollständigen Ringe von G noch ein unvollständiger angelagert wird (R_1 sei vollständig!), so werden nur da neue Anlagerungsmöglichkeiten verwendet, wo der Ring unvollständig ist. An die Stelle konkaver Ecken im äussersten vollen Ringe treten vielleicht keine konkaven Ecken im unvollständigen Ringe. Auf dem Umfange des entstehenden Polygons können nur dann zwei konkave Ecken aufeinanderfolgen, wenn in einer davon der vollständige und der unvollständige Ring angrenzen. Hier existiert aber dann ein l-Eck, das wenigstens $(l-4)$ konvexe Ecken mit dem ganzen Umfange gemein hat.

Betrachten wir nun einen vollständigen Ring, so finden wir auf seinem äusseren Umfange P_ϱ ($\varrho \geqq 1$) stets mindestens l Systeme von wenigstens $(l-4)$ aufeinanderfolgenden konvexen Ecken. Wir wollen feststellen, ob sich diese Systeme durch Anlagerung unvollständiger Ringe beseitigen lassen. Man findet leicht, dass dies nur möglich ist, wenn die l-Ecke zweier Systeme benachbart sind; statt der zwei Systeme erhält man im günstigsten Falle ein System von wenigstens $(l-3)$ aufeinanderfolgenden konvexen Ecken; dies ist auch nur für $l = 6$ und R_1 möglich; in allen anderen Fällen bleiben die Systeme von $(l-4)$ konvexen Ecken erhalten. Schliessen wir nur den Fall aus, dass auch R_1 unvollständig ist, so können wir doch stets behaupten, dass wenigstens drei Systeme von $(l-4)$ aufeinanderfolgenden konvexen Ecken bei G vorhanden sind.

Nun sehen wir den Umfang von G als innere Begrenzung des Gebietes E aller an G stossenden l-Ecke von $R_{\nu+1}$ an. Hier können nur an einer Stelle, nämlich da, wo die l-Ecke A, B oder C ihre Ecken haben, mehr als eine konkave Ecke aufeinanderfolgen. Konkave und konvexe Ecken vertauschen

sich aber bei E und G. Also müsste E mindestens drei Systeme von wenigstens (1—4) konkaven, aufeinanderfolgenden Ecken haben. Durch die Vielecke A, B und C werden höchstens zwei Systeme von zwei oder mehr aufeinanderfolgenden konkaven Ecken veranlasst, weshalb wir zu einem Widerspruch kommen und wie nach Satz 2) wirklich kein Gebiet G existieren kann.

Dieser Satz 2) gestattet qualitativ den Überblick über alle l-Eckzerlegungen einfach zusammenhängender Gebiete, speziell also auch die Zerlegungen konvexer m-Ecke in konvexe l-Ecke, $l \geq 6$. Von welchem l-Eck als Zentrum eines Ringsystemes wir ausgehen, ist gleichgültig. Stets ist um das Zentrum herum eine Anzahl $\nu \geq 0$ vollständiger Ringe gelegt. Sind noch weitere l-Ecke vorhanden, so zerfällt der erste unvollständige Ring $R_{\nu+1}$ in eine Anzahl von $\mu_{\nu+1} \geq 1$ von „Stufen". Unter einer Stufe verstehen wir die Gesamtheit von l-Ecken desselben unvollständigen Ringes $R_{\varrho+1}$, deren jedes eine Strecke oder, wenn P_ϱ nur einen Aussenpunkt enthält, diesen Aussenpunkt mit einem l-Ecke der Gesamtheit gemein haben kann; ein Aussenpunkt eines l-Ecks grenzt an Gebiet, das keinem l-Eck der Zerlegung angehört.

Auf jeder Stufe von $R_{\varrho+1}$ können sich eine oder mehrere Stufen von $R_{\varrho+2}$ aufbauen. Während aber zwei Stufen S_1 und S_2 von $R_{\varrho+1}$ einen Aussenpunkt gemein haben können, ist das bei den Stufen T_1 auf S_1 und T_2 auf S_2 nicht mehr möglich.

Über einer Stufe S von $R_{\varrho+1}$ können beliebig viele Stufen beliebig vieler Ringe aufgebaut sein. Die Gesamtheit dieser Stufen einschliesslich S nennen wir eine auf S ruhende „Terrasse", wenn jede Stufe ausser S auf einer der Gesamtheit angehörigen Stufen aufgebaut ist. Als Ordnung einer Terrasse bezeichnen wir die Zahl der zu ihr gehörigen Stufen, auf denen keine Stufe aufgebaut ist.

In den Begriffen Ring, Stufe, Terrasse finden wir alle diejenigen Eigenschaften niedergelegt, welche bei Zerlegungen einfach zusammenhängender Gebiete in konvexe l-Ecke, $l \geq 6$,

auftreten können. Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit dieser Überlegungen auch für den Fall der Verwendung konvexer Vielecke verschiedener Seitenzahlen l_i, wenn nur $l_i \geq 6$ ist. Ein Schema einer solchen Zerlegung gibt Fig. 20, in der jedes l_i-Eck durch einen Punkt ersetzt ist. Die Punkte für denselben Ring liegen bei festgewähltem Zentrum in gleichem Abstande von diesem. Die Punkte für die l-Ecke der Stufen eines unvollständigen Ringes sind in Kreisbögen enthalten, zwischen denen sich Bögen ohne Punkte einschalten. Für die Vielecke derselben Terrasse sind die Punkte senkrecht über bez. in den Kreisbogen der Stufe S der Terrasse eingezeichnet.

III. Gewisse halbreguläre Einteilungen der Kugelfläche.

§ 12. Zerlegung regulärer Polygone in reguläre Polygone gleicher Seitenlänge.

Unter regulären Polygonen der einfach überdeckten Kugel verstehen wir im folgenden einfache Polygone von gleichen Seiten, welche Bogen von grössten Kugelkreisen sind; die Zahl der Polygonecken ist 0, 2, 3, 4, . . .; das Nulleck ist die Halbkugel, die Seiten jedes Zweiecks sind grösste Halbkreise.

Wie aus der Einleitung zu ersehen ist, beschäftigen sich die folgenden Paragraphen mit der Aufsuchung bestimmter halbregulärer Zerlegungen der Kugelfläche. Im vorliegenden Paragraphen schicken wir die Untersuchung einer sich dabei teils direkt, teils indirekt stellenden Frage voraus, die auch an sich ein gewisses Interesse hat. Wir ermitteln die sämtlichen regulären Polygone der Kugel, die sich in reguläre Polygone gleicher Seitenlänge zerlegen lassen. Hierfür ist die Einteilung in drei Fälle bequem, je nachdem das zu zerlegende Polygon erstens 0, zweitens 2, drittens 3 und mehr Ecken hat.

Wir suchen zunächst die Zerlegungen der Halbkugel auf. Es ergibt sich sofort der triviale Fall I der Zerlegung in beliebig viele Zweiecke. Sollen andere Vielecke verwendet werden, so grenzen auf dem grössten Kreise in wenigstens einem Randpunkte zwei Polygone aneinander; da die Winkel in jedem von beiden grösser als $\frac{\pi}{3}$ sind, würde

die Winkelsumme dreier Polygone schon grösser als π sein. Haben die Polygone n′ und n″ Seiten, so ist:

$$\frac{n'-2}{n'} \cdot \pi + \frac{n''-2}{n''} \cdot \pi > \pi$$

oder:

$$(n' - 3)(n'' - 3) + (n' - 3) + (n'' - 3) < 3.$$

Da jeder der Klammerausdrücke ≥ 0 ist, muss wenigstens einer gleich 0 sein, also $n' = 3$. Dann folgt $n'' < 6$, $n'' = 3, 4, 5$.

Für $n'' = 3$ liegen am grössten Kreise der Halbkugel nur Dreiecke mit Winkeln $\frac{\pi}{2}$, welche einen Innenpunkt gemein haben, weshalb es vier Dreiecke sein müssen. Wir finden so die Zerlegung II der Halbkugel in vier Quadranten.

Liegen am grössten Kreise der Halbkugel Dreiecke vom Winkel α und Vierecke vom Winkel β an, so stossen von diesen stets zwei Vierecke und ein Dreieck zusammen. Also ist an Innenpunkten noch der Winkel $2\pi - \alpha - 2\beta = \alpha$ auszufüllen. Da das auszufüllende Polygon dieselbe Seite, wie das Drei- und Viereck hat, kann es nur ein reguläres Dreieck vom Winkel α sein, das die gesuchte Zerlegung III abschliesst. Die Seite s unserer Vielecke ist auf dem grössten Kreise sechsmal vorhanden, ist also $= \frac{\pi}{3}$. Für α und β findet man:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\beta}{2} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}$$

$$\alpha = 70^0\,29', \quad \beta = 109^0\,31'.$$

Die Halbkugel ist in vier Dreiecke und drei Vierecke zerlegt.

Für $n'' = 5$ verfahren wir wie bei $n'' = 4$. Längs des grössten Kreises liegen abwechselnd Dreiecke und Fünfecke. An den mehreren Vielecken gemeinsamen Innenpunkten muss je ein Dreieck angelagert werden; das Polygon im Innern hat dann Fünfeckwinkel und -seiten; ein Fünfeck muss also

diese Zerlegung IV abschliessen (Fig. 21).[1]) In IV ist die Halbkugel aus zehn Dreiecken und sechs Fünfecken aufgebaut. Die Seite der Polygone ist auf dem grössten Kreise zehnmal eingetragen, also $s = \frac{\pi}{5}$; den Winkel α des Dreiecks und β des Fünfecks findet man:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)$$

$$\alpha = 63^0\ 26', \quad \beta = 116^0\ 34'.$$

Ausser den Zerlegungen I bis IV existieren keine Zerlegungen der Halbkugel in reguläre Polygone von gleichen Seiten.

Bei jedem Zweieck sind zunächst ebenfalls Zerlegungen V in eine beliebige Anzahl von Zweiecken möglich. Ausserdem können wieder nur Dreiecke allein oder Dreiecke kombiniert mit Vier- oder Fünfecken auftreten. Wenn Zerlegungen existieren, so müssen die Winkel und Seiten der Drei- und n″-Ecke mit denen übereinstimmen, welche wir bei der Halbkugel gefunden haben, weil sie in beiden Fällen als Winkel an Randpunkten und in regulären Polygonen berechnet werden. Es kommt wesentlich auf die Winkel der Zweiecke an; im allgemeinen setzen sie sich aus Winkeln von Drei- und n″-Ecken zusammen; sind sie aber überstumpf, so brauchen die Ecken des Zweiecks nicht nur mit Ecken von Drei- und n″-Ecken zusammenzufallen; es kann nämlich eine ganze Halbkugel auf eine der Weisen I bis IV zerlegt sein, welche sich gegen den Rest der Zerlegung in ∞^1 verschiedenen Lagen befinden kann. Halbkugel und Rest zerfallen aber dann in eine Anzahl von Zweiecken,

---

1) Die Figuren zu Teil III sind sämtlich schematisch; es ist stets berücksichtigt worden, dass die Analysis situs einer Figur mit derjenigen der darzustellenden Kugelzerlegung bei stereographischer Projektion übereinstimmte und übermässige Verzerrungen möglichst vermieden wurden; jeder Bogen eines grössten Kreises der Kugel ist durch einen Kreisbogen abgebildet.

welche nur ein Drei- oder n″-Eck an den Ecken haben, wenn sie zerlegt sind. Nur diese einfachsten Zerlegungen wollen wir hier berücksichtigen.

Für $n'' = 3$ bauen zwei Dreiecke vom Winkel $\frac{\pi}{2}$ ein Zweieck auf: Zerlegung VI; zwei derartige Zweiecke liefern die Halbkugel II.

Für $n'' = 4$ möge zunächst ein Dreieck an der einen Seite des Zweiecks liegen; hierauf folgt ein Viereck und zum Abschluss von VII ein Dreieck: Fig. 22. Liegt aber an der Ecke des Zweiecks ein Viereck, so müssen wir an den beiden Randpunkten des Zweiecks je ein Dreieck anlagern, worauf noch Platz für ein Viereck ist. Bei dieser Zerlegung VIII (Fig. 23) bilden zwei Dreiecke und zwei Vierecke ein Zweieck. Die Zweiecke VII und VIII ergänzen sich zur Zerlegung III der Halbkugel.

Ebenso existiert für $n'' = 5$ eine Zerlegung IX aus zwei Fünfecken und vier Dreiecken mit einem Dreieck (Fig. 24) sowie eine Zerlegung X aus sechs Dreiecken und vier Fünfecken mit einem Fünfeck (Fig. 25) an jeder Zweiecksecke. Die Zweiecke IX nnd X ergänzen sich zu einer nach IV zerlegten Halbkugel.

Nun sind noch die Zerlegungen regulärer n-Ecke, $n > 2$, zu suchen. Hier unterscheiden wir die Fälle, in denen auf dem Umfange des n-Ecks Randpunkte auftreten oder nicht. Im zweiten Falle müssen in jeder Ecke des n-Ecks zwei Vielecke, ein n′- und ein n″-Eck vorhanden sein, damit das n-Eck überhaupt zerlegt ist und doch die Winkelsumme an jeder Ecke kleiner als π ist. Hier ist $n' = 3$, $n'' = 3, 4, 5$. Für $n'' = 3$ stossen n Dreiecke in einem Innenpunkte zusammen, haben also den Winkel $\frac{2\pi}{n}$, während das n-Eck den Winkel $\frac{4\pi}{n}$ hat. Also ist:

$$\frac{4\pi}{n} > \frac{n-2}{n}\pi$$

$$n < 6.$$

Da $\frac{4\pi}{n}$ kleiner als π sein muss, bleibt nur $n = 5$ übrig. Für die Seite s des Fünfecks und Dreiecks finden wir:

$$\cos s = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{5}$$
$$s = 63^0\ 26'.$$

Bei dieser Zerlegung XI ist ein Fünfeck aus fünf Dreiecken aufgebaut: Fig. 26.

Liegen am Umfange des n-Ecks abwechselnd Dreiecke und Vierecke, mit Winkeln α und β, so ist $n = 2\nu$ eine gerade Zahl und die Drei- und Vierecke schliessen ein ν-Eck ein mit dem Winkel $2\pi - \alpha - 2\beta$. Für die Seite s aller zu verwendenden Polygone bestehen die Relationen:

$$\cos\frac{s}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{\cos\frac{\pi}{2\nu}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\cos\frac{\pi}{\nu}}{\sin\frac{\alpha+2\beta}{2}}.$$

Die ersten drei Gleichungen liefern für α:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{\left(1-8\cos^2\frac{\pi}{2\nu}\right)\left(16\cos^2\frac{\pi}{2\nu}-1\right)}}{4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2\nu}}.$$

Die Faktoren unter der Wurzel müssen positiv sein, woraus folgt:

$$2 \geqq 16\cos^2\frac{\pi}{2\nu} > 1$$
$$\frac{1}{4}\sqrt{2} \geqq \cos\frac{\pi}{2\nu} > \frac{1}{4}$$
$$76^0 > \frac{180^0}{2\nu} > 70^0$$
$$\nu < \frac{9}{7}.$$

Da $\nu \geqq 2$ sein müsste, ist dieser Fall unmöglich.

Bei $n'' = 5$ wechseln auf dem Umfange des n-Ecks Drei- und Fünfecke ab und es haben stets zwei Fünfecke und ein Dreieck einen Innenpunkt gemein. Hier beträgt ihre Winkelsumme mehr als $\frac{\pi}{3} + 2 \cdot \frac{3\pi}{5}$ oder $\frac{23}{15}\pi$, also ist der übrig bleibende Winkel kleiner als $\frac{7}{15}\pi$. Es könnte also nur ein Dreieck angelagert werden, wobei sich Dreiecks- und Fünfeckswinkel zu π ergänzen müssten. Weil dies ausgeschlossen ist, kann kein n-Eck existieren.

Sollen weitere Zerlegungen von n-Ecken in reguläre Polygone gleicher Seite möglich sein, so müssen auf den Seiten des n-Ecks Randpunkte auftreten. Da an diesen nur n'- und n''-Ecke vorhanden sein dürfen, $n' = 3$, $n'' = 3, 4, 5$, kommen die Vielecke mit den bereits ausgerechneten Winkeln und Seiten in Frage. Für $n'' = 3$ ergibt sich die Halbkugel, ein hierher nicht gehöriger Fall. Für $n'' = 4$ und 5 müssen an zwei Seiten eines Dreiecks n''-Ecke angelagert werden. Dann führt $n'' = 4$ zur Zerlegung eines Zweiecks nach VIII. Bei $n'' = 5$ erhält man, wenn auf der n-Eckseite ein Dreieck anliegt, $n = 3$; aus vier Dreiecken und 3 Fünfecken baut sich diese Zerlegung XII eines Dreiecks auf (Fig. 27). Liessen wir zwei Dreiecke auf einer n-Eckseite liegen, so erhielten wir das Zweieck X.

Damit sind wir am Schluss dieser Untersuchungen angelangt. Es hat sich ergeben, dass für die Halbkugel und n-Ecke, $n > 2$, eine Reihe von eindeutig definierten Zerlegungen existiert. Dies ist bei den Zweiecken komplizierter. Hier begnügen wir uns, die einfachsten Typen von Zerlegungen aufzustellen. Ist der Zweieckswinkel $> \pi$, so kann die Zerlegung einen Parameter enthalten, entsprechend den ∞^1-Drehungen, welche eine Halbkugel in sich überführen.

§§ 13—16. Zerlegung der Kugelfläche in reguläre Polygone von zwei Seitenlängen.

§ 13. Eine Halbkugel bleibt unzerlegt.

Wir beginnen jetzt die Aufstellung aller Zerlegungen der einfach überdeckten Kugelfläche in reguläre Polygone, die stets in zwei Klassen zerfallen; zwei Polygone derselben Klasse haben gleiche, zwei Polygone verschiedener Klassen haben verschiedene Seitenlängen. Wie bereits in der Einleitung bemerkt, teilen wir unsere Aufgabe dichotomisch ein und behandeln die dabei gewonnenen grösseren Abschnitte je in einem der Paragraphen 13—16. Die Einteilung wählen wir folgendermassen. Zuerst unterscheiden wir, ob eine Halbkugel unzerlegt bleibt, Fall A (§ 13), oder nicht, Fall B. Einer weiteren Einteilung bedarf Fall B; wir berücksichtigen, ob bei einer Zerlegung Zweiecke auftreten: B 1, oder nicht: B 2 (§ 16). Von beiden erweist sich B 1 als wesentlich komplizierter; als weiteres Unterscheidungsmerkmal benutzen wir hier, ob bei jedem Randpunkte der Zerlegung nur zwei Polygone ihre Ecke haben: B 1 a (§ 14), oder zwei und mehr Polygone: B 1 b (§ 15). Die Vollständigkeit dieser nur mittels Dichotomieen hergestellten Einteilung leuchtet ohne weiteres ein, sodass wir uns der Behandlung der Einzelfälle zuwenden können.

Im Fall A bleibt eine Halbkugel unzerlegt; also muss die andere Halbkugel so zerlegt werden, dass in ihr nur Polygone gleicher Seite auftreten. Hier kommen also die Zerlegungen I bis IV von § 12 in Betracht. Sie geben für unsere jetzige Untersuchung vier Zerlegungen I bis IV. Jede Zerlegung der Halbkugel liefert auch nur eine Zerlegung der Vollkugel. Damit ist der Fall A gänzlich erledigt.

§ 14. Zerlegungen ohne Nullecke, mit Zweiecken und zwei Polygonen an jedem Randpunkt.

Im Fall B 1 a, den wir in diesem § behandeln, dürfen Zweiecke auftreten, aber an jedem Randpunkte haben nur zwei

Polygone eine Ecke. Ausser den Zweiecken treten also nur Polygone gleicher Seite kleiner als π auf. Dann liegen auf den Zweieckseiten Randpunkte. An den Randpunkten sind entweder α) nur Zwei- und n-Ecke oder β) auch n- und n′-Ecke vorhanden, n, $n' > 2$. Wie wir in § 12 sahen, ist im letzteren Falle $n = 3$ und $n' = 3, 4, 5$.

Im Unterfalle α) haben ein n-Eck und ein Zweieck an einem Randpunkte eine Ecke gemein. An dem Randpunkt, in dem Zwei- und n-Eck eine zweite Ecke gemein haben, und den wir auch „freie Ecke“ nennen wollen, lagern wir wieder ein Zweieck an, was wir an der entstehenden freien Ecke wiederholen u. s. w.; nachdem n Zweiecke angelagert sind, ist noch Platz für ein zweites n-Eck vorhanden. Bilden wir die Summe I für die Inhalte der $(n + 2)$ Polygone, indem α und β bez. die Winkel der Zwei- und n-Ecke sind:

$$I = n \cdot 2\alpha + 2n \cdot \beta - 2(n - 2)\pi = 4\pi$$

Hiernach ist keine Relation weiter zu erfüllen, als dass α und β Supplementwinkel sind. Die Zerlegungen V (Fig. 28 für $n = 5$) existieren also für jedes n in ∞^1 verschiedenen Formen, indem β alle Werte zwischen $\frac{n-2}{n}\pi$ und π annimmt. Zu jedem Winkel β existieren ausserdem zwei spiegelbildliche Formen. Man könnte diese Zerlegungen etwa als Windungszerlegungen bezeichnen. Sie erinnern an die Zerlegung I der gesamten Ebene in § 3.

Bei Unterfall β) mögen an einer Seite eines Zweiecks Polygone anzulagern sein. Entweder ist mindestens eine der Ecken des Zweiecks Randpunkt oder beide sind Innenpunkte. Im ersteren Falle wählen wir wie beim Fall α die Anlagerung eines n-Ecks mit supplementärem Winkel an das Zweieck zum Ausgangspunkt und müssen dann dichotomisch alle weiteren Anlagerungsmöglichkeiten durchprobieren. Im zweiten Falle achten wir wesentlich darauf, ob noch ein weiteres unzerlegtes Zweieck mit Innenpunkten als Ecken auftreten kann. Dies ist selbstverständlich, wenn wir ein Nulleck nur in Zweiecke und das übrig bleibende Nulleck in

Vielecke gleicher Seitenlänge kleiner als π zerlegen. Wir werden stets den Fall, dass die Ecken eines Zweiecks Innenpunkte sind, bei jedem der getrennt behandelten Fälle $n' = 3, 4, 5$ zuerst durchführen.

Betrachten wir nun $n' = 3$. Sollen die zwei Ecken eines Zweiecks Innenpunkte sein, so gibt es auch ein Zweieck, an dessen Seite und Ecke ein Dreieck angelagert ist. An dessen freier Ecke darf kein Zweieck liegen, weil sonst das Ausgangszweieck einen Randpunkt als Ecke hätte. Man erkennt leicht, dass rings um einen Innenpunkt zerlegte und unzerlegte Zweiecke aufeinanderfolgen. Bezeichnen wir diese symbolisch durch α (Dreieckswinkel) und Z (Zweieck), so können wir die Zerlegungen symbolisch danach angeben, welchen Arten von Zweiecken wir bei einem Umlauf um einen Innenpunkt begegnen. Wir erhalten so die Zerlegungen:

$$\alpha Z, \quad \alpha\alpha Z, \quad \alpha Z\alpha Z, \quad \alpha\alpha\alpha Z, \quad \alpha\alpha Z\alpha Z, \quad \alpha Z\alpha Z\alpha Z.$$

Diese wollen wir sämtlich der Klasse VI_1 von Zerlegungen zurechnen. Ein Zweieck Z kann übrigens seinerseits nach V (§ 12) zerlegt sein.

Falls eine Ecke eines Zweiecks Randpunkt ist, lagern wir an diesem ein Dreieck vom supplementären Winkel $\frac{\pi}{2}$ an. In der freien Ecke fügen wir ein weiteres Zweieck hinzu. Um nicht eine Zerlegung V zu erhalten, schieben wir an der freien Ecke ein Dreieck ein. Bleibt das nun noch vorhandene Zweieck unzerlegt, so entsteht VI_2, wird es in zwei Dreiecke zerlegt, dann VI_3. Wird das zweite Zweieck durch ein Dreieck an der freien Ecke ersetzt, so entsteht eine Halbkugel. Zerlegen wir die zweite Halbkugel in zwei Zweiecke oder ein Zweieck und zwei Dreiecke oder vier Dreiecke, wobei aber keine Zweiecksecke Innenpunkt werden darf, so bezeichnen wir die entstehenden Zerlegungen mit VI_2, VI_3 und VI_4 in weiterem Sinne. Es gibt entsprechend den verschiedenen Lagen der zwei Halbkugeln gegeneinander ∞^1 verschiedene Formen in jeder der 3 Klassen. Sämtliche Zerlegungen für $n' = 3$ sind so gefunden.

Bei $n' = 4$ und 5 habe das Dreieck den Winkel α, das n'-Eck den Winkel β. Es können an Randpunkten Zweiecke mit Winkeln α und β vorhanden sein. Wir beginnen stets mit der Anlagerung eines Zweiecks an das Dreieck und erschöpfen zuerst gänzlich den Fall, dass an Randpunkten Zwei- und Dreiecke auftreten. Hernach kommen nur noch Zweiecke vom Winkel α zur Verwendung.

Sei jetzt $n' = 4$. Wir erledigen zunächst die Fälle, in denen die beiden Ecken eines Zweiecks Innenpunkte sind. Wird an seiner einen Seite und Ecke ein n- oder n'-Eck angelagert, so kann an der freien Ecke kein Zweieck liegen, weil sonst die zweite Ecke des Ausgangszweiecks Randpunkt wäre. Also wechseln stets zerlegte und unzerlegte Zweiecke ab, deren Ecken in den beiden Innenpunkten liegen. Die zerlegten Zweiecke sind nach VII oder VIII des § 12 zerlegt. Wir können die Zerlegungen kurz angeben, indem wir die Reihenfolge der verschiedenen Arten von Zweiecken bei einem Umlauf um einen Innenpunkt angeben. Sind Z, α, β die Zeichen von Zweiecken, die nach V, VII und VIII des § 13 zerlegt sind, so ist eine grosse Zahl von Zerlegungen möglich, die wir sämtlich in die eine Klasse VII_1 aufnehmen wollen, und von denen wir einige symbolisch angeben:

αZ, βZ, $\alpha \alpha Z$, $\alpha \beta Z$, $\beta \alpha Z$, $\beta \beta Z$, $a Z \alpha Z$, $a Z \beta Z$, $\beta Z \beta Z$

u. s. w.

Diejenigen Zerlegungen, deren Symbole den Buchstaben Z mehrmals enthalten, existieren in unendlich vielen Formen, selbst wenn ihre Zweiecke Z nicht weiter zerlegt sind.

Ist wenigstens eine Ecke jedes Zweiecks Randpunkt, so lagern wir ein Zweieck und Dreieck aneinander, ferner an die freie Ecke ein weiteres Zweieck und an die neue freie Ecke ein Viereck, um nicht zu V zu gelangen; ein Zweieck an der freien Ecke von Viereck und Zweieck würde das erste Zweieck teilweise überdecken, also muss an der freien Ecke ein Dreieck liegen. Bleibt das noch auszufüllende Zweieck unzerlegt, so resultiere VII_2, wird es in Drei- und Vierecke zerlegt, VII_3. Ferner legen wir an das

Zwei- und Dreieck, unsere Ausgangsfigur, in der freien Ecke ein Viereck und daran in der freien Ecke ein Zweieck an. Lagert man an der so entstandenen freien Ecke des Vierecks noch ein Zweieck an, so hinterbleibt nur noch Platz für ein Drei- und ein Viereck: Zerlegung VII_4 (Fig. 29). In VII_5 ist an das vorhandene Drei- und Viereck nebst zwei Zweiecken ein Drei- und ein Viereck angelagert, worauf ein Zweieck unzerlegt bleibt, welches in VII_6 auch noch zerlegt ist. Entfernen wir nun alle Polygone bis auf das zweite Zweieck wieder und ersetzen dies an der freien Ecke durch ein Dreieck, so ist eine Halbkugel ausgefüllt, welche sich gegenüber der zweiten auch zerlegten Halbkugel in ∞^1 Stellungen befinden kann, wobei aber kein Innenpunkt in einer Zweiecksecke auftreten darf. Ist die zweite Halbkugel nur in Zweiecke zerlegt, so resultiere VII_2, ist in ihr ein zerlegtes Zweieck mit einem Dreieck an der Ecke vorhanden, so sei es VII_3; ist ein Zweieck vom Winkel β zerlegt, dann VII_6; ist schliesslich die ganze Halbkugel nach § 12, III zerlegt, so sei die Zerlegung VII_7 genannt. Die Bezeichnungen $VII_{2,\ 3,\ 6}$ haben also hier einen weiteren Sinn erhalten.

Es ist nun noch der Fall zu untersuchen, dass gar keine Zweiecke vom Winkel β angelagert sind. Legen wir an ein Viereck drei Zweiecke von supplementärem Winkel an und zerlegen den Rest der Kugel in Drei- und Vierecke, so entsteht VII_8. Werden an das Viereck nur zwei einander berührende Zweiecke angelagert, so können wir die an das erste Viereck angrenzenden Drei- und Vierecke einzeichnen, da an ihre Stelle keine Zweiecke mehr zu treten brauchen. Dann hat kein Zweieck mehr Platz, wir können also die Zerlegung VII_9 (Fig. 30) mit Drei- und Vierecken vervollständigen. Lagern wir am ersten Viereck zwei einander nicht berührende Zweiecke an, so können wir die Drei- und Vierecke, welche ans erste Viereck grenzen können, ebenfalls hinzufügen. Lassen wir das übrig bleibende Zweieck unzerlegt, so erhalten wir wieder VII_8 (Fig. 31), wird es zerlegt, dann VII_{10}. Soll endlich nur ein Zweieck am Viereck an-

liegen, so ergänzen wir mittels zwei Dreiecken und eines Vierecks die Zerlegung einer Halbkugel, welche sich gegenüber der zweiten ebenfalls zerlegten Halbkugel in ∞^1 verschiedenen Lagen befinden kann, wobei die Ecken der Zweiecke keine Innenpunkte sein dürfen. Ist nun die zweite Halbkugel in zwei Zweiecke zerlegt, so ergibt sich VII_5; ist in ihr nur ein Zweieck mit einem Dreieck an den Ecken zerlegt, so ist dies Zerlegung VII_6, ist die ganze Halbkugel nach § 12 III zerlegt, so resultiere VII_{11}.

Damit sind die Zerlegungen für $n' = 4$ gefunden. Sehen wir von VII_1 ab, so enthalten viele unserer Zerlegungen einen Parameter. Dies ist nicht der Fall bei $VII_{4, 8, 10}$. Eine Zerlegung und ihr Spiegelbild rechnen wir hier wie im folgenden stets in dieselbe Klasse.

Für $n' = 5$ suchen wir zunächst die Zerlegungen auf, bei denen die Ecken wenigstens eines Zweiecks in Innenpunkten liegen. Hier fassen wir diejenigen Zerlegungen in die eine Klasse VIII_1 zusammen, bei denen nach § 12, V, IX und X zerlegte Zweiecke bei einem Umlaufe um einen Innenpunkt überschritten werden. Diese Zerlegungen können analog wie bei VII_1 durch Symbole mit den Buchstaben Z, α, β bezeichnet werden; in beiden Fällen gibt es gleich viel Zerlegungen. Die Zerlegungen, bei denen die beiden Ecken eines Zweiecks Innenpunkte sind, haben wir aber damit noch nicht erschöpft. Lagern wir nämlich an der Seite eines Zweiecks Drei- und Fünfecke an, sodass seine beiden Ecken Innenpunkte sind, so ist unter den Ecken der Drei- und Fünfecke wenigstens eine noch Innenpunkt, an den wir ein Zweieck anlagern können, ohne das erste zu überdecken. Die Zerlegung VIII_2, bei der je ein Zweieck vom Winkel α und β auftritt, ist sich spiegelbildlich gleich; die Zerlegung VIII_3 (Fig. 32) mit zwei Zweiecken vom Winkel α existiert dagegen in zwei symmetrischen Formen.

Wollen wir nun die Zerlegungen ableiten, bei denen stets wenigstens eine Zweiecksecke Randpunkt ist, so haben wir ein Zwei- und ein Dreieck mit supplementären Winkeln als

erste Ausgangsfigur. An der freien Ecke fügen wir ein ebensolches Zweieck, an der neuen freien Ecke aber ein Fünfeck ein. Ein Zweieck an dessen freier Ecke würde mit dem ersten Zweieck ein Dreieck gemein haben; also kann hier nur ein Dreieck angelagert werden, worauf wegen Platzmangel für ein Zweieck ein Fünfeck folgen muss. Nach Einfügung zweier Dreiecke an diesem Fünfeck hinterbleibt Platz für ein Zweieck. Bleibt es unzerlegt, so resultiert VIII_4, wird es zerlegt, VIII_5. Um neue Zerlegungen zu erhalten, müssen wir an der freien Ecke der Ausgangsfigur sofort ein Fünfeck anlagern. An der entstandenen freien Ecke legen wir zunächst ein Zweieck an; diese Operation lässt sich an demselben Fünfeck noch zweimal wiederholen, worauf ein Drei- und Fünfeck hinzuzufügen ist, um VIII_6 (Fig. 33) zu erhalten. Bei VIII_7 (Fig. 34) ist das letzte Zweieck zerlegt. Wird das letzte Zwei-, Drei- und Fünfeck entfernt und das zweitletzte Zweieck durch ein Dreieck ersetzt, so hat an dessen freier Ecke ein Zweieck vom Winkel β Platz; den Rest der Fläche füllen wir mit Drei- und Fünfecken aus, dann entsteht VIII_8. Wird das letzte Zweieck durch ein Fünfeck an der freien Ecke ersetzt, so hat an dessen freier Ecke kein Zweieck Platz, ohne vorhandene Flächenstücke zu überdecken; also wird man ein Drei- und Fünfeck zugleich am Zweieck vom Winkel α anlagern. Von den zwei Innenpunkten an Fünfecken gestattet der eine die Anlagerung eines Zweiecks; durch Ergänzung mittels dreier Dreiecke und eines Fünfecks entsteht VIII_9. Ersetzen wir das letzte Zweieck durch ein Dreieck am Innenpunkt und fügen an diesem Dreieck ein Drei- und ein Fünfeck, sowie am letzteren zwei Dreiecke hinzu, so bleibt ein Zweieck vom Winkel α übrig. Zerlegen wir dieses nicht, so erhalten wir VIII_{10}, wird es zerlegt, dann VIII_{11}. Um spätere Untersuchungen, welche keine neuen Zerlegungen liefern, weglassen zu können, bemerken wir, dass die Zerlegungen $VIII_{4, 5, 10, 11}$ einparametrigen durch die verschiedenen Lagen zerlegter Halbkugeln gegeneinander bedingten Schaaren angehören. Mittels der gegenwärtig benutzten Ausgangsfigur erhalten wir

nur noch eine neue Zerlegung. Um diese zu finden, müssen wir in den abgeleiteten Zerlegungen VIII_{10} und VIII_{11} alle nach dem zweiten Zweieck angelagerten Polygone entfernen und dieses selbst durch ein Drei- und ein Fünfeck am ersten Zweieck ersetzen. An diesem Fünfeck fügen wir zwei Zweiecke vom Winkel α an, worauf der Rest der Kugelfläche in Drei- und Fünfecke zu zerlegen ist. Ausser dieser Zerlegung VIII_{12} (Fig. 35) erhält man durch systematisches Ausprobieren mit unserer Ausgangsfigur keine neuen Zerlegungen, weshalb wir hier die Untersuchungen abbrechen.

Wir müssen jetzt die Zerlegungen suchen, bei denen die Ausgangsfigur ein Zwei- und Fünfeck ist, ein Zwei- und Dreieck mit supplementären Winkeln aber ganz fehlen. Hier verfahren wir so, dass wir der Reihe nach am Fünfeck der Ausgangsfigur wie an jedem andern Fünfeck höchstens vier, drei, zwei, ein Zweieck mit gemeinsamer Ecke anliegen lassen. Sind an das Fünfeck vier Zweiecke angelagert und ist die übrige Fläche in Drei- und Fünfecke zerlegt, so sei dies VIII_{13}. Liegen drei Zweiecke an aufeinanderfolgenden Seiten des Fünfecks, so können wir am Zweieck, welches mit dem Fünfeck eine freie Ecke gemein hat, ein Drei- und Fünfeck anlagern. Ein Zweieck an der nun vorhandenen freien Ecke würde das erste Zweieck teilweise überdecken. Daher lagern wir am dritten Zweieck noch ein Drei- und Fünfeck an. Weil am ersten Fünfeck kein Zweieck weiter liegen soll, muss der Rest der Fläche in Drei- und Fünfecke zerlegt werden: Zerlegung VIII_{14}. Liegen von drei am ersten Fünfeck angelagerten Zweiecken nur zwei an angrenzenden Fünfeckseiten, so muss der Rest der Fläche in Drei- und Fünfecke zerlegt werden: VIII_{15}.

Bei der Anlagerung von höchstens zwei Zweiecken an irgend ein Fünfeck der Zerlegung mögen diese zuerst an benachbarten Fünfeckseiten liegen. An der freien Ecke des Fünfecks können wir ein Dreieck und ferner an dessen freier Ecke ein Fünfeck anlagern. An diesem haben nacheinander zwei Zweiecke Platz; den Rest der Fläche nehmen Drei- und

Fünfecke ein. Wird in dieser Zerlegung VIII_{16} (Fig. 36) das letzte Zweieck noch zerlegt, so entsteht VIII_{17}. Um zu einer neuen Zerlegung zu gelangen, entfernen wir alle Polygone bis auf das nun letzte Zweieck wieder, das wir durch ein Dreieck ersetzen, dem wir am Zweieck ein Fünfeck beifügen. Am Innenpunkte der beiden Fünfecke kann jetzt ein Zweieck liegen, während der Rest der Fläche in Drei- und Fünfecke zerlegt werden muss. Dies ist VIII_{18} (Fig. 37), und wenn das letzte Zweieck zerlegt wird, VIII_{19}. Sollen ferner die Zweiecke am ersten Fünfeck an getrennten fünf Eckseiten liegen, so ist die Anlagerung der drei Polygone nur auf eine Weise möglich. Die eine hier resultierende Zerlegung ist wieder VIII_{18}; ausser ihr ergibt sich das nicht hierher gehörige VIII_3.

Endlich soll an jedes Fünfeck der Zerlegung höchstens ein Zweieck mit gemeinsamer Ecke grenzen. Dann können wir am Zweieck sofort ein Drei- und Fünfeck einfügen. An der freien Ecke des Fünfecks darf aber ein Zweieck liegen. Auch an diesem lagern wir ein Drei-, Fünf- und Zweieck an; hierauf schliessen vier Dreiecke und drei Fünfecke diese Zerlegung VIII_{20} ab. Dies ist eine Windungszerlegung für $n = 3$, in der das Dreieck nach § 13 XII zerlegt ist. Wird das letzte Zweieck durch ein Drei- und Fünfeck ersetzt, so brauchen nur noch zwei Dreiecke eingeschoben zu werden, damit ein Zweieck vom Winkel β auszufüllen bleibt. Lassen wir es unzerlegt, so erhalten wir VIII_{21}, wird es zerlegt, dann VIII_{22}. In den beiden letzten Zerlegungen sind zwei Halbkugeln besonders zerlegt, durch deren Verschiebung gegeneinander man zu je ∞^1 Formen der Klassen VIII_{21} und $_{22}$ gelangt; es dürfen jedoch nie zwei Ecken eines Zweiecks Innenpunkte sein.

Damit sind durch systematisches Ausprobieren auch für $n' = 5$ alle Zerlegungen gefunden, bei denen in Randpunkten nur zwei Polygone ihre Ecke haben; sieht man von den meisten Zerlegungen aus VI_1, VII_1, VIII_1, sowie von VII_2, $VII_{2,\ 5}$ und $VIII_{4,\ 21}$ ab, in denen die eine Halbkugel auch

in zwei sonst willkürliche Zweiecke zerlegt sein kann, ohne den Bedingungen unseres § zu widersprechen, so erhält man alle diese Zerlegungen aus der halbregulären Zerlegung zweier Halbkugeln in Drei- und n′-Ecke; in ihr werden passende Polygone der Zerlegung zu Zweiecken zusammengefasst, welche unzerlegt bleiben. Hiervon ist bei Anfertigung der Figuren Gebrauch zu machen, da in den Linien von $(n' + 1)$ Kreisen mit passender Lage alle nötigen Kreisbogen enthalten und die überflüssigen Bogen wegzulassen sind. Die $(n' + 1)$ Kreise geben eine Darstellung einer halbregulären Zerlegung der Kugel in Drei- und n′-Ecke.

§ 15. Zerlegungen ohne Nullecke, mit Zweiecken sowie zwei und mehr Polygonen an Randpunkten.

Wir untersuchen jetzt den Fall B 1 b, bei welchem Zweiecke auftreten sowie an Randpunkten zwei und mehr Polygone vorhanden sind. Es müssen also an wenigstens einem Randpunkte drei oder mehr Polygone eine Ecke haben; da aber nur je ein n- und n′-Eck $(n, n' > 2)$ vorhanden sein darf, muss hier wenigstens ein Zweieck auftreten. Wir setzen nun für das folgende fest, dass nie zwei Zweiecke mit einer gemeinsamen Seite auftreten dürfen. Man erkennt, dass beim Vorhandensein eines n-Ecks am Randpunkte zwei Zweiecke, beim Vorhandensein eines n- und n′-Ecks nur drei Zweiecke an ihm liegen können. In einigen Fällen befindet sich dann zwischen zwei Zweiecken ein n- oder n′-Eck, und das Zweieck, welches von den beiden ersteren eingeschlossen wird, muss aus n- und n′-Ecken aufgebaut werden. Aus dieser Bedingung folgen aber die Seiten und Winkel der n- und n′-Ecke schon; die eingeschlossenen Zweiecke sind nach § 12, VI bis X zu zerlegen. Die Zerlegungen mit derartigen eingeschlossenen Zweiecken lassen sich aus den Zerlegungen VI, VII, VIII des § 14 leicht ableiten. Bei den Zerlegungen VI_2, $VII_{2,5}$, $VIII_{4,21}$ können die zweiten Halbkugeln so zerlegt werden, dass am grössten Kreise in einem

Randpunkte ein n′-Eck und zwei Zweiecke oder ein und zwei Dreiecke nebst zwei und drei Zweiecken vorhanden sind. Ferner erhält man aus den Zerlegungen VII und VIII, bei welchen m Zweiecke vom Winkel β vorhanden sind, 4^m Zerlegungen, indem man jedes dieser Zweiecke nach Belieben garnicht oder in ein zerlegtes und ein unzerlegtes Zweieck oder schliesslich in ein zerlegtes und zwei unzerlegte Zweiecke zerfallen lässt; an den Ecken der zerlegten Zweiecke liegt stets ein Dreieck. Der Einfachheit halber mögen diese 4^m Zerlegungen in derselben Klasse enthalten sein, welcher die eine bisher gefundene Zerlegung angehörte. Die Zahl der verschiedenen Zerlegungen ist hierdurch wesentlich vergrössert worden, insbesondere sind mehrere unendliche Schaaren von Zerlegungen neu hinzugetreten.

Im folgenden wenden wir nun unser Interesse den Zerlegungen zu, bei welchen nie zwei unzerlegte Zweiecke ein zerlegtes Zweieck einschliessen. Dann dürfen sich die Winkel des n- und n′-Ecks nicht zu π ergänzen, wenn sich bei einem Zweieck am Randpunkt neue Zerlegungen ergeben sollen. Die Anzahl der Polygone mit Ecken an einem Randpunkt ist also zwei oder drei. Im letzteren Falle kann entweder das Zweieck zwischen dem n- und n′-Eck liegen oder zwischen dem Zwei- und n-Eck das n′-Eck. Wir beweisen nun die Unmöglichkeit des Falles, dass ein Zweieck zwischen dem n- und n′-Eck liegt.

Es mögen ein Zwei- und n-Eck eine freie Ecke A (Fig. 38) gemein haben, an der wir ein Zwei- und n′-Eck anlagern müssen. Hierbei liege das Zweieck zwischen dem n- und n′-Eck. Am letzteren Polygon sind stets zwei freie Ecken B und C vorhanden, wenn das erste Zweieck und das n-Eck eine Ecke gemein haben. An B und C muss je ein Zweieck angelagert werden. Im Zweieck mit der Ecke in B liege ein grösster Halbkreis; dieser darf die durch A und C gehende Seite des Zweiecks mit der Ecke in A nicht schneiden, schneidet also das verlängerte CA in B′; ebenso schneidet die Verlängerung eines grössten Halbkreises aus

dem in C anzulagernden Zweieck die Verlängerung von BA in C'. Die grössten Kreise durch B und B' sowie C und C' schneiden sich in D und E. Sollten sich nun die an B und C anzulagernden Zweiecke nicht überdecken, so müssten BE und $CE > \pi$ sein. Da aber B und C den grössten Halbkreisen DBE und DCE angehören, so sind BE und $CF < \pi$ und die bei B und C anzulagernden Zweiecke müssen sich notwendig überdecken. Da gegenseitige Überdeckung ausgeschlossen ist, darf also niemals ein Zweieck zwischen einem n- und n'-Eck angelagert werden.

Weil stets Zweieck an Zweieck liegt, können Zweiecksecken keine Innenpunkte sein. Damit erhalten wir hier stets den Windungszerlegungen ähnliche Einteilungen der Kugelfläche. Diese können wir nun ableiten, indem wir als Ausgangsfiguren alle Anordnungsmöglichkeiten von Zwei-, Drei- und n'-Eck nehmen. Die Polygone haben entweder die Reihenfolge 3, n', 2 oder n', 3, 2. An der freien Ecke lagern wir entweder ein Zweieck mit supplementärem Winkel oder ein n- oder n'-Eck und Zweieck ein. Durch systematische Anwendung erhalten wir alle Zerlegungen.

Sei zunächst $n' = 3$. Hier gibt es nur eine Ausgangsfigur. An der freien Ecke lagern wir ein grosses Zweieck an. Die freie Ecke beider Dreiecke gibt dann nur Platz für ein Zweieck. Nach Anlagerung eines grossen Zweiecks an der entstandenen freien Ecke hinterbleibt nur Platz für zwei Dreiecke. Diese Zerlegung IX_1 (Fig. 38) existiert in ∞^1 Formen; das Spiegelbild jeder Form ist von ihr verschieden, was für alle in B 1 b abzuleitenden Zerlegungen gilt. Ersetzen wir das letzte Zweieck durch ein Zwei- und Dreieck, so liegen die drei Dreiecke an einem Innenpunkte, an dem nur noch weitere Dreiecke angelagert werden müssten. Das erste der gleichzeitig einzufügenden Zweiecke würde aber bereits das Zweieck der Ausgangsfigur überdecken, wie man sich leicht überzeugt. Zu neuen Zerlegungen kann man deshalb nur gelangen, wenn man auch das erste grosse Zweieck entfernt und am Randpunkte zwei Dreiecke und ein Zweieck

auftreten lässt. Dann liegen drei Dreiecke um einen Innenpunkt herum und gehören einem regulären Vieleck an, das nach § 12 nur fünf Seiten haben kann sowie den Winkel $\frac{4\pi}{5}$. Diese Zerlegung IX_2 ist also eine spezielle Windungszerlegung für $n = 5$, in der das Fünfeck noch weiter zerlegt ist.

Setzen wir nun $n' = 4$ und nehmen als erste Ausgangsfigur diejenige mit der Reihenfolge Vier-, Drei-, Zweieck am Randpunkte. Wir erhalten X_1, wenn wir um das Drei- und Viereck nur Zweiecke mit supplementären Winkeln lagern. Ersetzt man das letzte Zweieck durch ein Zwei- und Dreieck, so ist die gemeinsame Ecke der Drei- und Vierecke Innenpunkt, weshalb das Zweieck der Ausgangsfigur durch andere Zweiecke überdeckt werden muss. Also werden wir die beiden letzten Zweiecke von XI entfernen und an der freien Ecke ein Zwei- und Dreieck anlagern. Fügen wir an der freien Ecke ein grosses und ferner ein kleines Zweieck ein, so lässt sich die neue Zerlegung X_2 mit zwei Dreiecken und einem Viereck abschliessen. Entfernen wir die beiden letzten Zweiecke wieder, so lässt sich durch Anlagerung von Dreiecken wegen der Überdeckung durch die beizufügenden Zweiecke keine neue Zerlegung erzeugen. Deshalb gehen wir auf die Ausgangsfigur zurück und lagern an der freien Ecke ein Zwei- und Dreieck an. Die Drei- und Vierecke haben dann einen Innenpunkt gemein, an dem nur noch Drei- und Vierecke liegen können. Es seien l Dreiecke und m Vierecke am Innenpunkt, sodass für die Winkel α und β der Drei- und Vierecke die Relation besteht:

$$l\,\alpha + m\,\beta = 2\,\pi.$$

Der Inhalt I der Drei- und Vierecke um den Innenpunkt muss kleiner als der der Halbkugel sein:

$$I = 3\,l\,\alpha - l\,\pi + 4\,m\,\beta - 2\,m\,\pi = m\,\beta + (6 - l - 2\,m)\,\pi < 2\,\pi$$

$$\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{l + 2\,m - 4}{m}\,\pi$$

$$2\,l + 3\,m > 8.$$

Die zweite Grenze liefert die Gleichung für α und β mittels deren unteren Grenzen:

$$12 > 2\,l + 3\,m > 8.$$

Hier gibt es die Lösungen:

$$m = 1, \quad l = 3, 4$$
$$m = 2, \quad l = 2$$
$$m = 3. \quad l = 1.$$

Wegen der anzulagernden Zweiecke müssen die Polygone am Innenpunkte ein konvexes Polygon aufbauen, weshalb $m = 3$ unmöglich ist. Für $m = 2$ ergäbe sich $\alpha + \beta = \pi$, wobei die kleinsten Zweiecke entarten. Also bleibt nur $m = 1$ übrig. Man findet für $l = 3$:

$$\frac{\sin \alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3 - \sqrt{2}}$$

$$\alpha = 78^0\,4', \quad \beta = 125^0\,42'.$$

Dies liefert Zerlegung X_3. Ferner für $l = 4$:

$$\frac{\cos \beta}{2} = \frac{1{,}104\ldots}{\sqrt{2}}.$$

Hier ist $\frac{\beta}{2} < \frac{\pi}{4}$, also $\beta < \frac{\pi}{2}$ was der Voraussetzung widerspricht. An zwei und mehr Ecken des Vierecks dürfen keine Innenpunkte entstehen, weil sonst der Inhalt der Polygone am Innenpunkt grösser als 2π ist. Weitere Zerlegungen können wir also mittels der Ausgangsfigur nicht finden; die zweite Ausgangsfigur liefert aber auch keine neuen Zerlegungen, womit $n' = 4$ erledigt ist.

Für $n' = 5$ benutzen wir die Ausgangsfigur mit der Reihenfolge Fünf-, Drei-, Zweieck. Durch Anlagerung von Zweiecken an den successive entstehenden freien Ecken finden wir XI_1, eine Zerlegung mit Zwei-, Drei- und Fünfecken, welche in ∞^1 Formen existiert. Entfernung des zuletzt angelagerten Zweiecks und Ersetzung durch Zwei- und Dreieck führt schliesslich zu Überdeckung. Werden dagegen die beiden letzten Zweiecke entfernt und durch ein Dreieck

sowie zwei Zweiecke ersetzt, so entsteht die Zerlegung XI_2, welche vier Dreiecke und zwei Fünfecke enthält und in ∞^1 Formen existiert. Bei Entfernung der drei letzten Zweiecke gelangen wir zu keiner neuen Zerlegung. Hier erhalten wir nochmals XI_2, und es könnten Zerlegungen mit Drei- und Fünfecken am Innenpunkte existieren. Sind dabei l-Dreiecke vom Winkel α und m-Fünfecke vom Winkel β vorhanden, so ist:

$$l\,\alpha + m\,\beta = 2\,\pi.$$

Ferner gibt die Relation, dass der Flächeninhalt I dieser $(l + m)$ Polygone kleiner als $2\,\pi$ sein muss:

$$I = 3l\alpha - l\pi + 5m\beta - 3m\pi = (6 - l - 3m)\pi + 2m\beta < 2\pi.$$

Wir ersetzen hier und in der obigen Gleichung α und β durch ihre unteren Grenzen und finden:

$$20 < 5\,l + 9\,m < 30.$$

Folgende Wertsysteme sind zulässig:

$$m = 1, \quad l = 3, 4$$
$$m = 2, \quad l = 1, 2.$$

$m = 2$ ist unmöglich, weil hier entweder $\alpha + \beta = \pi$ ist oder die Drei- und Fünfecke am Innenpunkt kein konvexes Polygon aufbauen. Zu $m = 1$, $l = 3$ ergibt sich ein zu kleiner Wert für β, nämlich $102^0\,12'$, weshalb eine Zerlegung unmöglich ist, und dies gilt in höherem Grade von $l = 4$ mit $\beta = 78^0\,30'$. Wollten wir nun auf die Ausgangsfigur zurückgehen, so lieferten auch nur Zerlegungen mit Innenpunkten etwas Neues, was nach dem eben gefundenen ausgeschlossen ist. Die zweite Ausgangsfigur führt zum gleichen Resultate, sodass gleichzeitig mit $n' = 5$ der Fall B 1b seine vollständige Erledigung gefunden hat.

§ 16. Zerlegungen ohne Zweiecke.

Es sind jetzt nur noch die Zerlegungen von B 2 abzuleiten, in denen keine unzerlegten Zweiecke auftreten. Wegen der zwei verschiedenen Seitenlängen sind auch hier

Randpunkte vorhanden, an denen ein n- und n′-Eck liegt. Nun ist es möglich, dass das n- und n′-Eck verschiedene Seiten haben; dann fügen wir an der freien Ecke das Polygon mit der grösseren Seite ein. Dieser Prozess der Anfügung lässt sich fortsetzen, erreicht aber stets nach einer endlichen Anzahl von Anwendungen sein Ende. Wir können $n = 3$, $n' = 3, 4, 5$ setzen und erhalten bei Verwendung von N Dreiecken und N′ n′-Ecken, wenn α und β die Winkel von Drei- und n′-Eck sind:

$$N(3\alpha - \pi) + N'(n'\beta - (n' - 2)\pi) = 4\pi.$$

Es ist $\alpha + \beta = \pi$, also:

$$\beta(N'n' - 3N) = [4 - 2N + N'(n' - 2)]\pi.$$

Da sich die Zerlegung für jedes β schliesst, ist $N'n' - 3N = 0$, sowie:

$$N = \frac{4n'}{6 - n'}, \quad N' = \frac{12}{6 - n'}.$$

Diese Zerlegungen XII, XIII, XIV für $n' = 3, 4, 5$ existieren in ∞^1 Formen und für jedes α in zwei symmetrischen Typen. Sie stehen in engem Zusammenhang mit den dualen regulären Polyedern; die Schwerpunkte der N Dreiecke sowie der N′ n′-Ecke sind nämlich Ecken von dualen Polyedern. Für $n' > 3$ sind wesentlich die Fälle zu unterscheiden, in denen entweder die Seite des Dreiecks oder die des n′-Ecks grösser ist. Der zwischen beiden liegende Fall der Seitengleichheit liefert die bei Sommerville angegebenen halbregulären Zerlegungen in Drei- und n′-Ecke gleicher Seiten.

Beim zweiten Fall, welcher am Randpunkte eintreten kann, grenzen an einem Randpunkte Polygone mit gleicher Seite und Ecke an. Ist $n = n' = 3$, so bilden die beiden Dreiecke ein Zweieck vom Winkel $\frac{\pi}{2}$. Entweder sind nun die beiden Ecken des Zweiecks Randpunkte, dann müssen an ihnen zwei weitere Dreiecke angelagert werden, sodass eine Halbkugel nach § 12 II ausgefüllt ist. Die andere Halbkugel werde nach § 12 III oder IV ausgefüllt, was die Zerlegungen

XV_1 und XV_2 ergibt. Hierzu mögen auch die Grenzfälle gerechnet werden, bei denen zwei Randpunkte in einen Innenpunkt zusammenfallen. Oder die Ecken des Zweiecks sind Innenpunkte, an denen ein Vieleck mit einer Seite, die kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist, angelagert werden muss. Dann können wir längs der ganzen Zweieckseite Drei- und n′-Ecke zufügen. Damit wir XV_1 und XV_2 nicht nochmals erhalten, müssen an den Ecken des Zweiecks auch auf der andern Seite Drei- und n′-Ecke angelagert werden. Die an den Innenpunkten dann noch übrigen Winkel können wir nur ausfüllen, wenn sie gleich $\frac{\pi}{2}$ sind. Nach Anlagerung zweier Dreiecke vom Winkel $\frac{\pi}{2}$ entsteht so eine Zerlegung der Kugel in vier zerlegte Zweiecke, von denen zwei nicht benachbarte aus je zwei Dreiecken aufgebaut sind, die übrigen aber auf verschiedene Weisen aus Drei- und n′-Ecken. Für $n' = 4$ und 5 ergeben sich so die Zerlegungen XV_4 und XV_5.

Sollen Zweiecke vom Winkel $\frac{\pi}{2}$ nicht auftreten, so müssen Drei- und Vierecke sowie Drei- und Fünfecke mit supplementären Winkeln verwendet werden. Es gibt noch zwei verschiedene Zerlegungen. Bei XV_3 ist die eine Halbkugel in Drei- und Vierecke, die andere in Drei- und Fünfecke zerlegt; bei XV_6 ist die Kugel in vier Zweiecke zerlegt, von denen je zwei mit nicht gemeinsamer Seite supplementäre Winkel haben und kongruente Vielecke enthalten.

Hiermit ist die Gesamtheit der halbregulären Zerlegungen der einfach überdeckten Kugelfläche in reguläre Polygone von zwei verschiedenen erlaubten Seitenlängen gefunden. Die angegebenen Einteilungen des Problems gestatten, jede beliebige Zerlegung dieser Eigenschaft mit einer in den 15 Klassen I bis XV enthaltenen Zerlegungen zu identifizieren. Die Unterklassen dieser Klassen enthalten kaum einmal nur eine Zerlegung, bestehen vielmehr oft aus Schaaren von unendlich vielen Zerlegungen. Ausserdem haben die Zweiecke

die Eigenschaft, sich in beliebig viele Zweiecke zerlegen zu lassen; dieser Vieldeutigkeit sind wir durch die Forderung aus dem Wege gegangen, dass nie zwei Zweiecke mit einer gemeinsamen Seite auftreten sollen. Bei Ausschliessung von Null- und Zweiecken von den regulären Polygonen hätten wir nur die neun letzten Zerlegungen erhalten.

Die obigen Untersuchungen sind durch Herrn Professor F. Bernstein angeregt und in liebenswürdigster Weise unterstützt worden. Für ihre endgültige Darstellung verdanke ich Herrn Professor Gutzmer wertvolle Ratschläge. Es sei mir deshalb gestattet, beiden Herren meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Inhalt.

Seite

§ 1. Einleitung 5

I. Zerlegungsbeweise des Pythagoräischen Lehrsatzes.

§ 2. Die bekannten Zerlegungsbeweise 9
§ 3. Ableitung neuer Beweise 12
§ 4. Systematische Einteilung aller Zerlegungsbeweise auf Grund des Gerüstbegriffes 16
§ 5. Die Polygone der Zerlegungsbeweise aus Polygonen gleichen Gerüsts mit drei verschiedenen Winkeln 21
§ 6. Eine Erweiterung auf Polygone mit vier verschiedenen Winkeln 35
§ 7. Über die Möglichkeit von Beweisen mittels der gefundenen Polygone 37

II. Aufbau konvexer m-Ecke aus konvexen l-Ecken.

§ 8. Allgemeine Überlegungen zum Problem . . . 52
§ 9. Die Fälle $l = 3, 4, 5$ ausschliesslich einiger Spezialfälle 54
§ 10. Aufbau von Drei-, Vier- und Fünfeck aus der kleinsten Zahl von Fünfecken 56
§ 11. Satz über den Aufbau aus konvexen l-Ecken, $(l \geq 6)$ 65

Seite

III. Gewisse halbreguläre Zerlegungen der Kugelfläche.

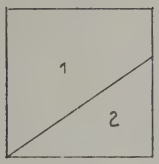
§ 12. Zerlegungen regulärer Polygone in reguläre Polygone gleicher Seitenlänge 72

§§ 13—16. Zerlegung der Kugelfläche in reguläre Polygone von zwei Seitenlängen.

§ 13. Eine Halbkugel bleibt unzerlegt 78
§ 14. Zerlegungen ohne Nullecke, mit Zweiecken und zwei Polygonen an jedem Randpunkt 78
§ 15. Zerlegungen ohne Nullecke, mit Zweiecken sowie zwei und mehr Polygonen an jedem Randpunkt 87
§ 16. Zerlegungen ohne Zweiecke 92

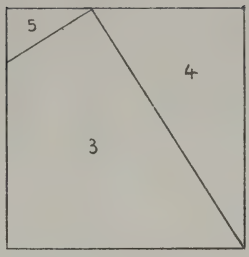
Lebenslauf.

Ich, Friedrich Paul Mahlo, evangelischer Konfession, bin am 28. Juli 1883 zu Coswig i. Anh. geboren als Sohn des daselbst wohnhaften, 1906 verstorbenen Rentiers Christian Mahlo und seiner Ehefrau Friederike, geb. Friedrich. Ich besuchte die Mittelschule zu Coswig sowie das Friedrichs-Gymnasium zu Dessau, auf dem ich Ostern 1902 das Reifezeugnis erwarb. Darauf studierte ich Mathematik und Naturwissenschaften je zwei Semester in Jena und Greifswald, ein Semester in Göttingen, zwei in München und seit Oktober 1905 bis jetzt in Halle. Hier bestand ich am 17. Februar 1908 das Examen rigorosum.

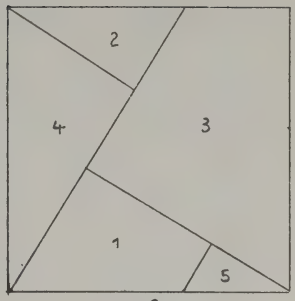


A

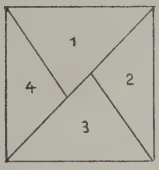
Fig. 1.



B

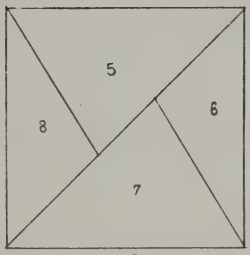


C

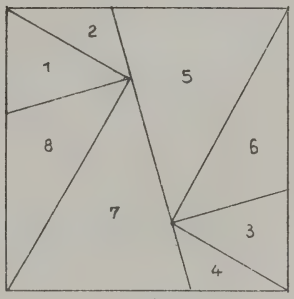


A

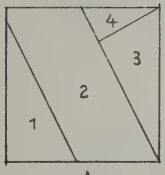
Fig. 2.



B

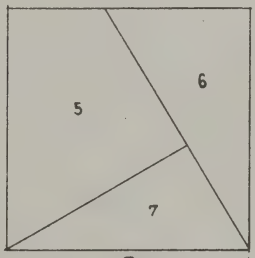


C

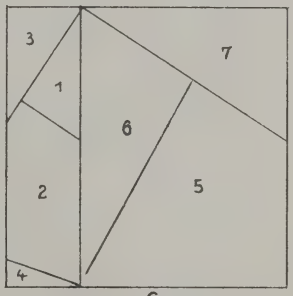


A

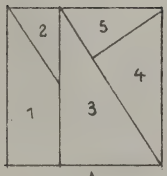
Fig. 3.



B

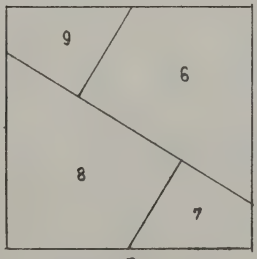


C

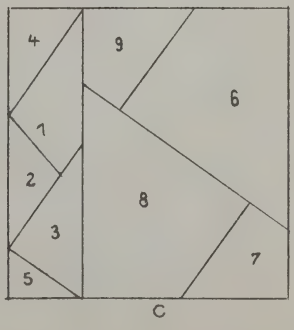


A

Fig. 4.



B



C

Fig.5.

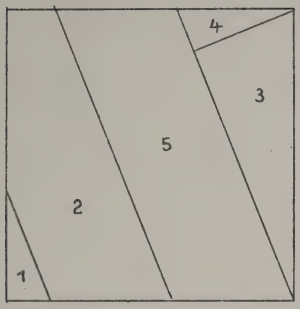
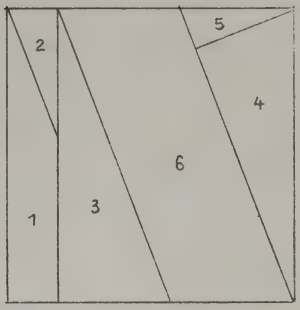


Fig.6.



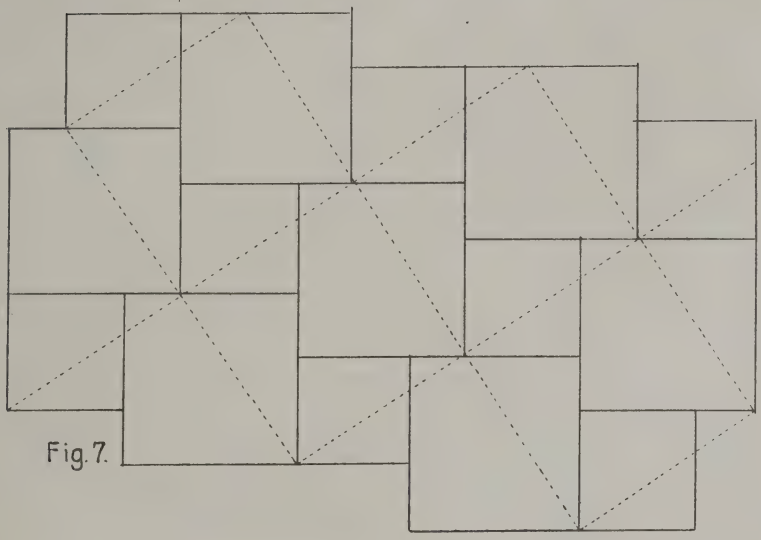


Fig.7.

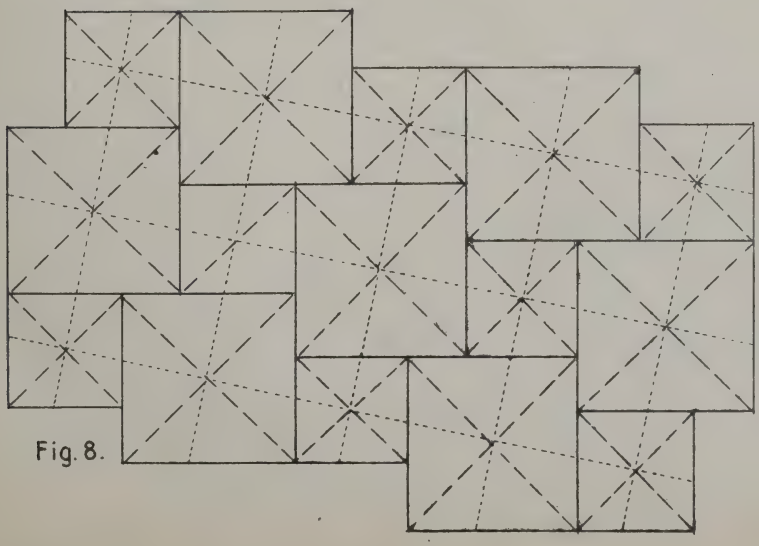


Fig.8.

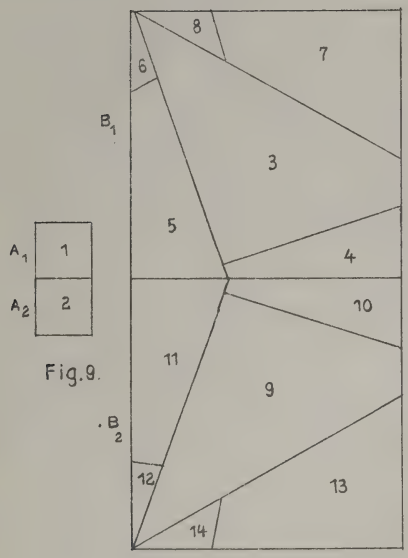
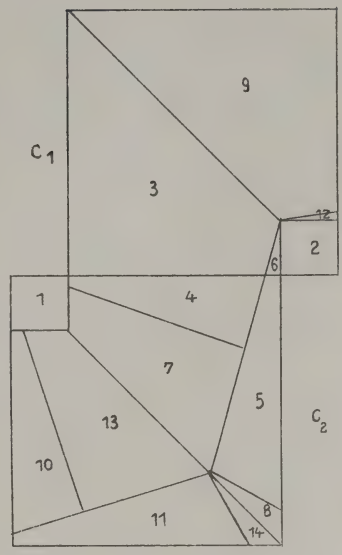


Fig. 9.



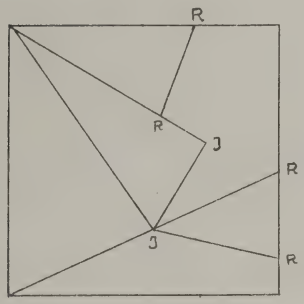


Fig. 10.

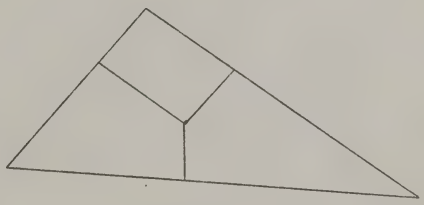


Fig. 11.

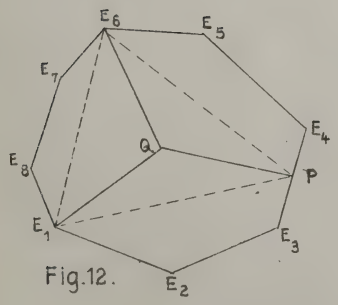


Fig. 12.

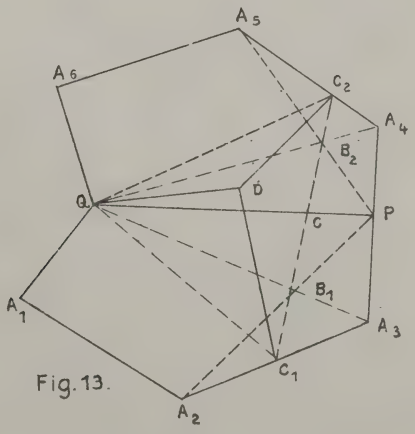


Fig. 13.

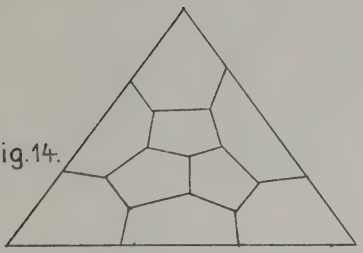


Fig. 14.

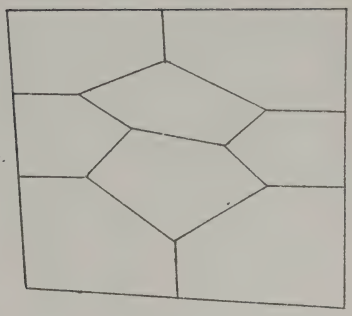


Fig. 15.

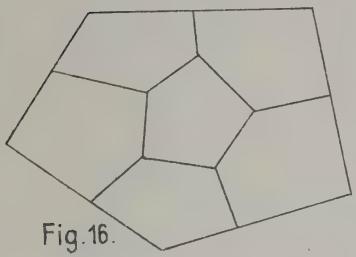


Fig. 16.

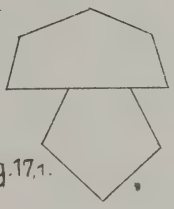
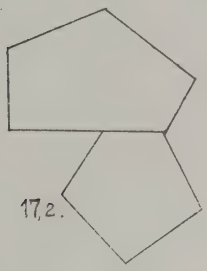


Fig. 17,1.



17,2.

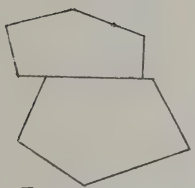
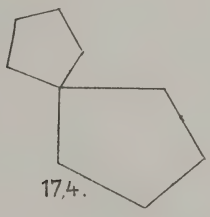
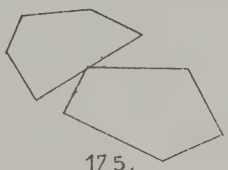


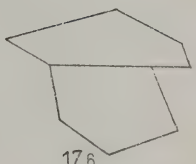
Fig. 17,3.



17,4.



17,5.



17,6.

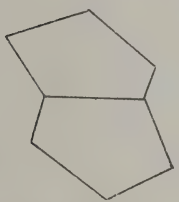
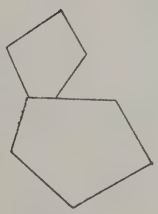
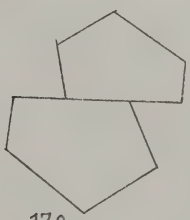


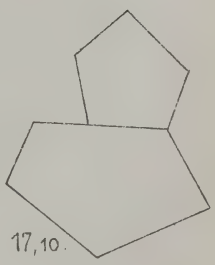
Fig. 17,7.



17,8.



17,9.



17,10.

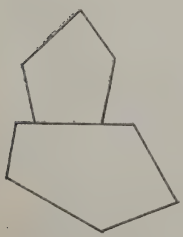
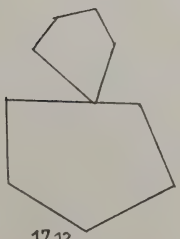
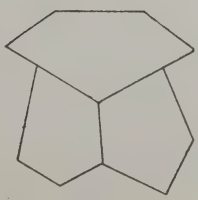


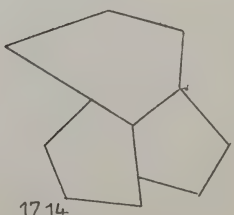
Fig. 17,11.



17,12.



17,13.



17,14.

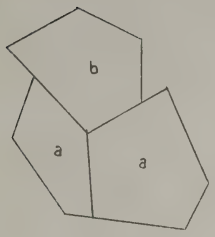
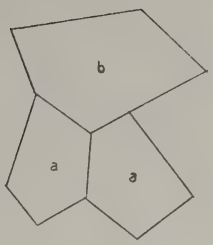
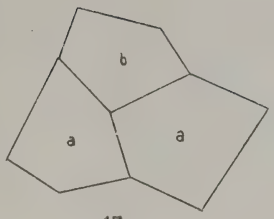


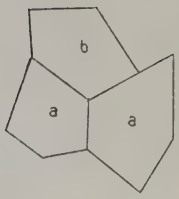
Fig. 17,15



17,16



17,17



17,18

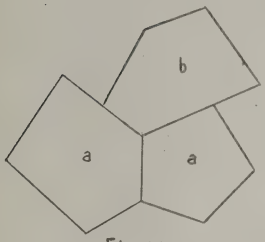
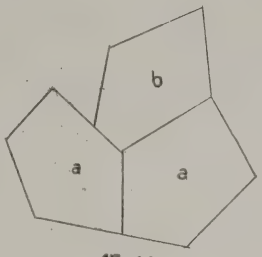
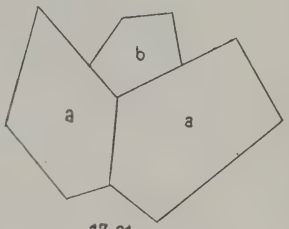


Fig.17,19



17, 20



17,21

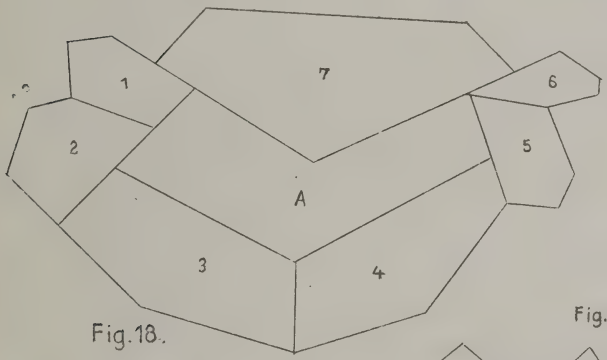


Fig.18.

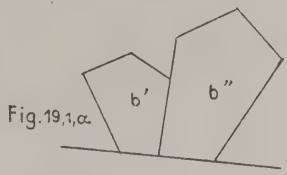


Fig.19,1,α

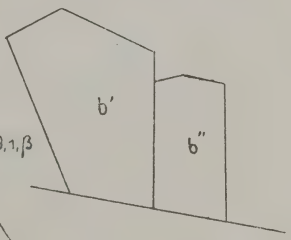


Fig.19,1,β

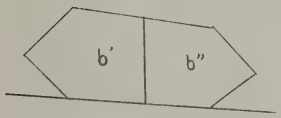
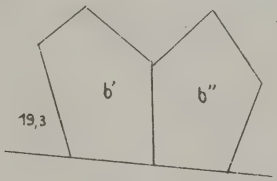
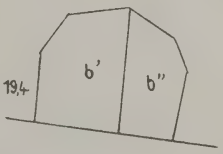


Fig.19,2





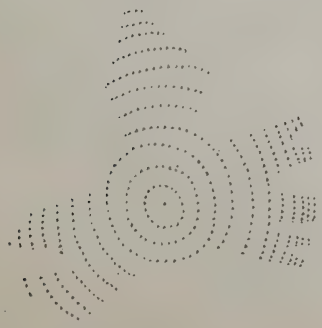


Fig.20.

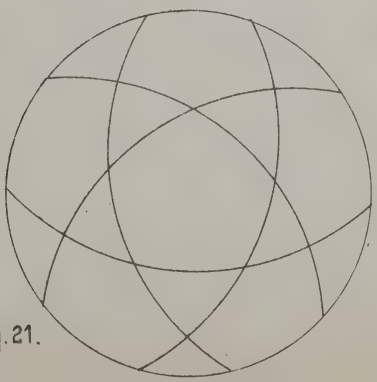


Fig.21.

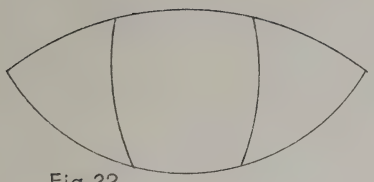


Fig. 22.

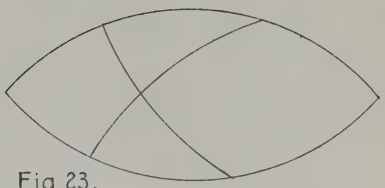


Fig. 23.

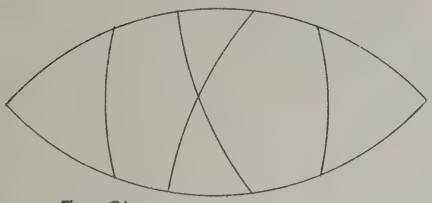


Fig. 24.

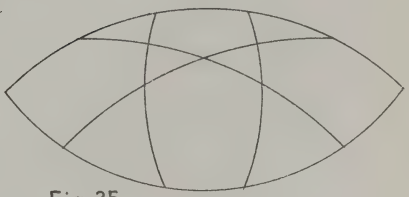


Fig. 25.

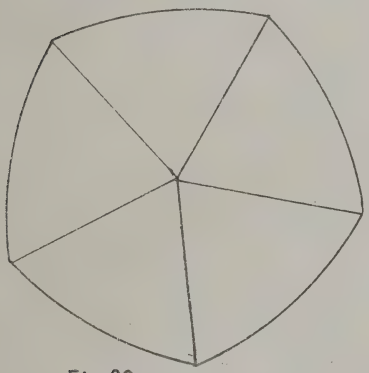


Fig. 26.

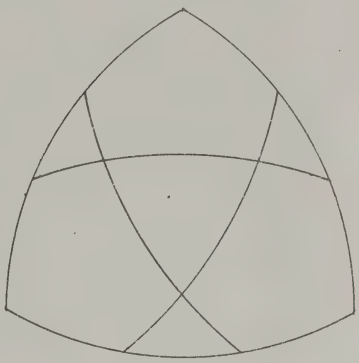


Fig. 27.

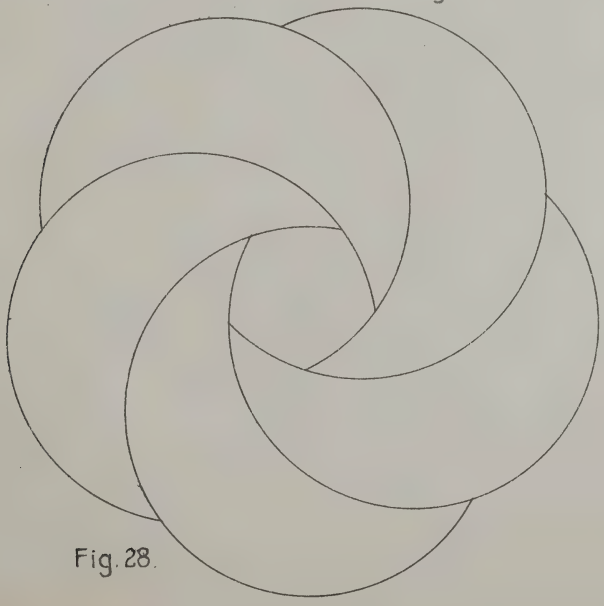


Fig. 28.

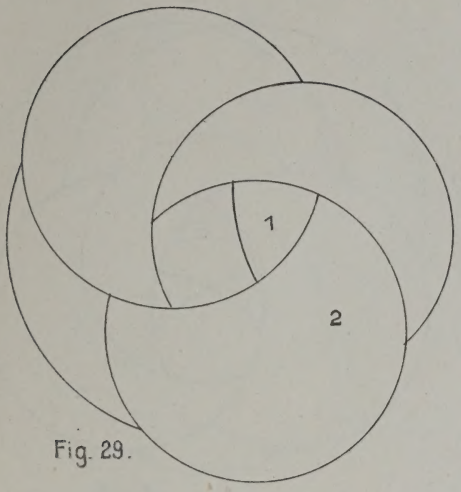


Fig. 29.

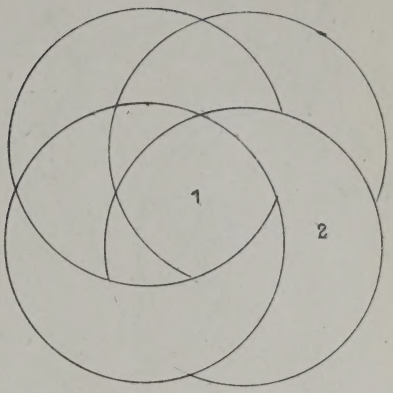


Fig. 30.

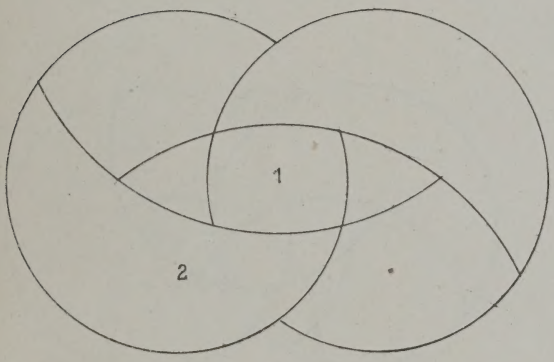


Fig. 31.

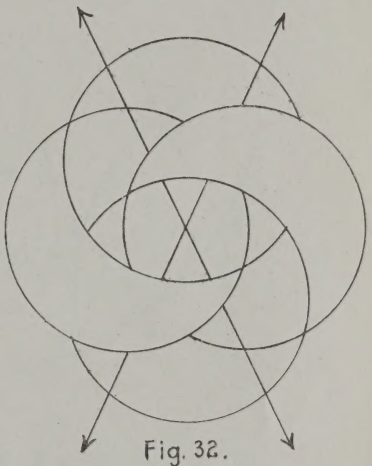


Fig. 32.

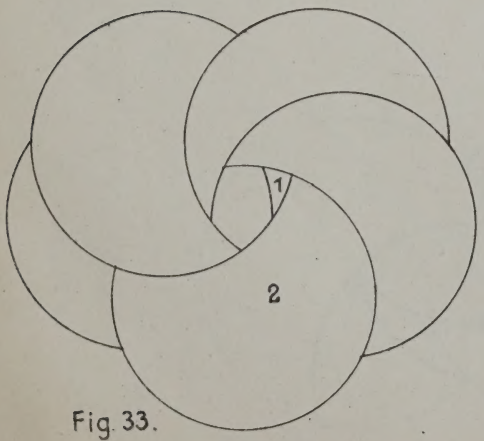


Fig. 33.

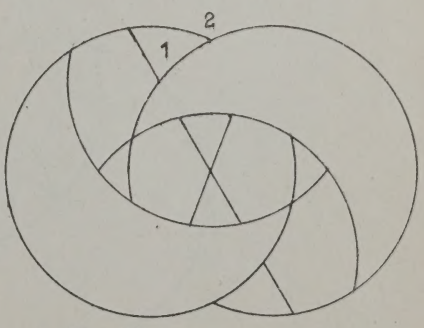


Fig. 34.

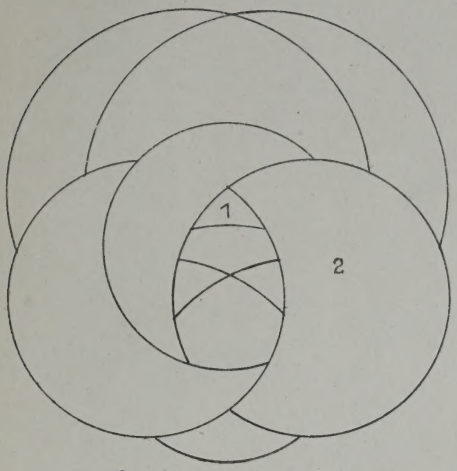


Fig. 35.

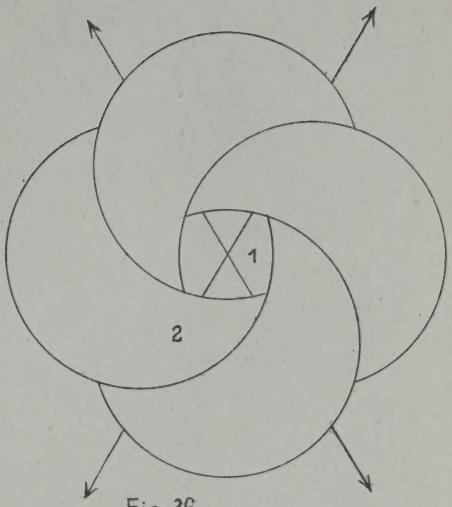


Fig. 36.

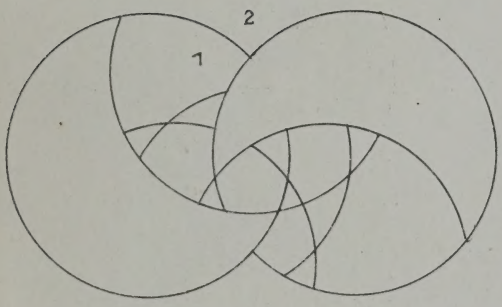


Fig. 37.

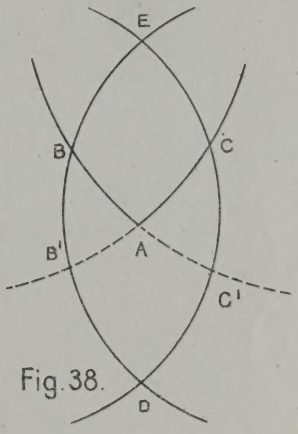


Fig. 38.

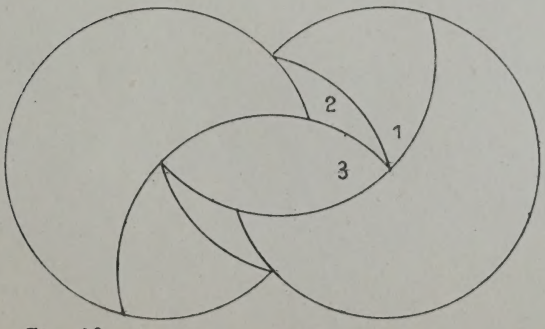


Fig. 39.